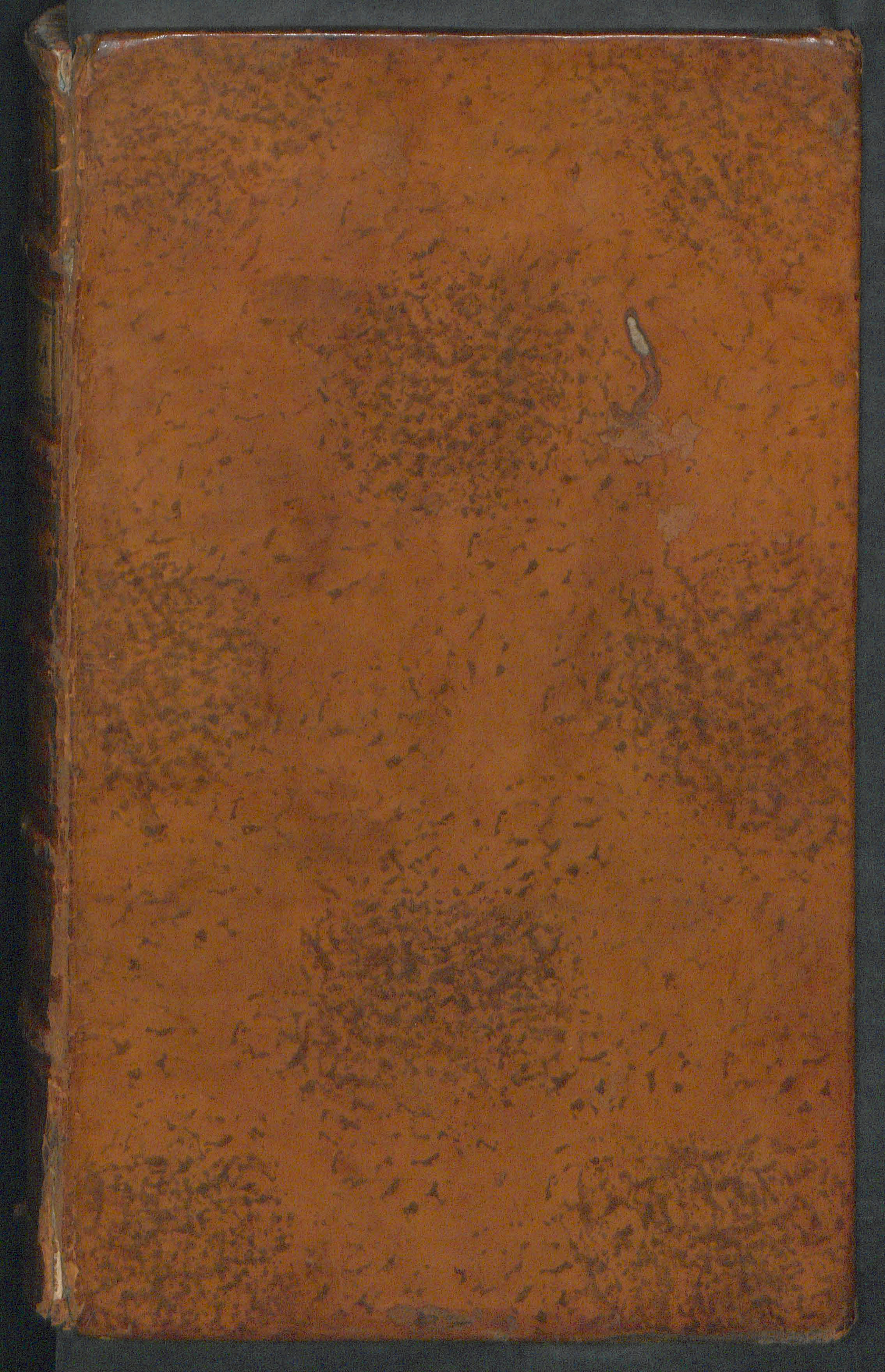






НАЧАЛЬНЫЯ ОСНОВАНІЯ АЛГЕБРЫ,

или

АРИѲМЕТИКИ ЛИТЕРАЛЬНОЙ,

СЛУЖАЩІЯ

для

Удобнѣйшаго и скорѣйшаго вычисленія какъ Ариѳметическихъ, такъ и Геометрическихъ задачь,

въ

ПОЛЬЗУ и УПОТРЕБЛЕНІЕ

РОССІЙСКАГО ЮНОШЕСТВА,

УПРАЖНЯЮЩАГОСЯ

въ

МАТЕМАТИЧЕСКИХЪ НАУКАХЪ;

СОБРАННЫЯ

изъ

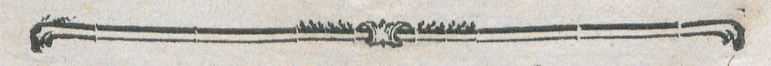
РАЗНЫХЪ АВТОРОВЪ

съ

Пріобщеніемъ грапированныхъ фигуръ на двѣнатцати таблицахъ,

Императорскаго Московскаго Университета Публичнымъ Ординарнымъ Профессоромъ, и Московскаго Россійскаго Собранія при томъ же Университетѣ Членомъ

ДМИТРІЕМЪ АНИЧКОВЫМЪ.



ВЪ МОСКВѢ,

Въ Университетской Типографіи у Н. Новикова 1781 года.

ОДОБРЕНІЕ.

По приказанію Императорскаго Московскаго Университета Господъ Кураторовъ, я читалъ книгу подъ заглавіемъ Начальныя Основанія Алгебры, *и не нашелъ въ ней ничего противнаго наставленію, данному мнѣ о разсматриваніи печатаемыхъ въ Университетской Типографіи книгъ; почему оная и напечатана быть можетъ. Коллежскій Совѣтникъ и Краснорѣчія Профессоръ и Ценсоръ печатаемыхъ въ Университетской Типографіи книгъ.*

АНТОНЪ БАРСОВЪ.





НАЧАЛЬНЫЯ ОСНОВАНІЯ АЛГЕБРЫ.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

О

Наименованіяхъ, употребляемыхъ въ Алгебрѣ и первыхъ оной началахъ.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ I.

§. 1.

Алгебра (Algebra, vel analysis), или *всеобщая Ариѳметика* (Arithmetica vniuersalis), или *Литеральная Ариѳметика* (Arithmetica Speciosa, seu Logistica) есть наука изъ данныхъ нѣсколькихъ количествъ, помощію сравненій, находить другія неизвѣстныя количества тогожъ роду, о которыхъ, въ разсужденіи данныхъ, нѣчто знать дается. Или Алгебра есть наука изъ данныхъ, или извѣстныхъ количествъ, помощію сравненій, находить неизвѣстныя.

ПРИМѢЧАНІЕ.

§. 2. Алгебра *Всеобщею Ариѳметикою* называется потому, что чрезъ оную вычисляется все, что можно вычислить. Почему великой Аглинской Математикъ Исаакъ Невтонъ руководство свое къ Алгебрѣ и назвалъ всеобщею Ариѳметикою. *Литеральноюжъ Ариѳметикою* именуется потому, что въ оной вмѣсто цыфръ употребляются всеобщіе знаки, то есть, азбучныя буквы, и чрезъ оныя дѣлаются обыкновенныя Алгебраическія выкладки, коихъ употребленіе первой ввелъ въ Алгебру Францискъ Віета. *Специозажъ* называется потому, что она предметомъ имѣетъ роды, или виды вещей; а *Алгеброю* названа она отъ Араповъ.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ II.

§. 3. Одно, или многія количества, означенныя буквами, почитаются *Алгебраическими количествами*, или *величинами* (Algèbraicae quantitates, seu magnitudines).

ПОЛОЖЕНІЕ I.

§. 4. Данныя, или извѣстныя количества въ Алгебрѣ всегда означаются первыми азбучными буквами, на пр. a, b, c, d, и проч. а неизвѣстныя, или искомыя количества послѣдними, на пр. x, y, z, и проч.

ПОЛОЖЕНІЕ II.

§. 5. Знакъ сложенія есть †, а вычитанія —; первой выговаривается чрезъ plus, а другой чрезъ minus. На пр. сумма двухъ количествъ a и b пишется a † b, а выговаривается a plus b; напротивъ того разность двухъ количествъ пишется a — b, а выговаривается a minus b. Положимъ, что a = 7 руб. b = 8 коп. то a † b будетъ значить 7 рублей съ 8 копѣйками; на противъ того a — b будетъ значить 7 рублей безъ 8 копѣекъ.

ПОЛОЖЕНІЕ III.

§. 6. Алгебраическое умноженіе или со всемъ не имѣетъ никакого знака, и умножаемыя между собою буквы ставятся безъ всякаго знака одна подлѣ другой; или означаются запятою, или точкою, а вообще употребляется слѣдующей знакъ ×. На пр. ежели должно умножить a на b; то произведеніе пишется ab, или a, b, или a. b, или на конецъ a × b; и во всѣхъ случаяхъ выговаривается a умножено на b.

ПРИМѢЧАНІЕ.

§. 7. Когда многія количества вмѣстѣ умножаются на одно, или одно количество на многія; то оныя многія количества заключаются въ вмѣстительной, а

умножающее количество ставится безъ всякаго знака прежде, или послѣ вмѣстительной. На пр. произведенiе изъ $a + b - c$ на d, пишется или такимъ образомъ: $(a + b - c)\, d$, или $d\, (a + b - c)$. Вообщежъ такое произведенiе изображается слѣдующимъ образомъ: $a + b - c \times d$, или $d \times a + b - c$, или надъ составленнымъ количествомъ проводится черта, на пр. $\overline{a + b - c} \times d$.

ПОЛОЖЕНIЕ IV.

§. 8. Знакъ дѣленiя въ Алгебрѣ употребляется двоеточiе, или дѣлимыя количества изображаются дробью. На пр. ежели a должно раздѣлить на b; то частное число пишется или такимъ образомъ: $a : b$, или $\frac{a}{b}$, и въ обоихъ случаяхъ выговаривается a раздѣлено на b.

ПРИМѢЧАНIЕ.

§. 9. Ежели многiя количества вмѣстѣ дѣлятся на одно, или одно на многiя; то оныя многiя количества заключаются въ вмѣстительной, а дѣлящее количество ставится съ знакомъ дѣленiя, прежде, или послѣ вмѣстительной. На пр. Частное число изъ $a + b$ на c пишется или такимъ образомъ: $(a + b) : c$, или $c : (a + b)$. Вообщежъ частное число изображается слѣдующимъ образомъ: $\frac{a + b}{c}$.

ПОЛОЖЕНІЕ V.

§. 10. Знакъ равенства въ Алгебрѣ такойже, какой и въ Ариѳметикѣ, употребляется, то есть, (=.)

ОПРЕДѢЛЕНІЕ III.

§. 11. *Количества простыя, или одинакія* (quantitates simplices, seu incomplexae) суть тѣ, которыя съ другимъ количествомъ чрезъ знакъ † не соединены, или отъ другаго чрезъ знакъ — не отдѣлены. На пр. x или y. На противъ того *количества сложныя*, или *составныя* (quantitates compositae, seu complexae) суть тѣ, которыя съ другимъ количествомъ или чрезъ знакъ † соединены, или отъ другаго чрезъ знакъ — отдѣлены. На пр. x † y, или x — y.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ IV

§. 12. *Количества*, предъ которыми находится знакъ †, или которыя не имѣютъ предъ собою никакого знака, или въ началѣ поставляются безъ всякаго знака, именуются *положительными*, или *подтвердительными* (quantitates positiuae; uel affirmatiuae), или *больщими ничего* (maiores nihilo); на противъ того тѣ количества, предъ которыми находится знакъ —, называются *недостаточными*, или *отрицательными* (quantitates priuatiuae, vel negatiuae), или *меньшими ничего* (minores nihilo), или *непристойными* (absurdae);

dae); и первыя изъ оныхъ показываютъ самую вещь, а послѣднія означаютъ недостаточество вещи.

ПРИБАВЛЕНІЕ

§. 13. Изъ чего явствуетъ что количества положительныя и отрицательныя, какъ имѣющія между собою нѣкоторое отношеніе, противополагаются другъ другу такимъ образомъ, что одно изъ нихъ, будучи приложено къ другому, сіе уничтожаетъ. Такими количествами почитаются на пр. *барышъ и накладъ*, *приращеніе и убавленіе*, *продолженіе и возвращеніе* и проч.

ПРИМѢЧАНІЕ

§. 14. Положимъ, что ты не имѣешь ничего денегъ, однако подарено тебѣ 100 руб. то ты получа 100. руб. будешь имѣть больше ничего. Напротивъ того положимъ, что ты, не имѣя ничего денегъ, долженъ заплатить 100. руб. Почему 100. руб. въ долгъ возьмешь, и прежде нежели заплатишь, будешь имѣть меньше ничего. Ибо должно тебѣ заплатить 100. руб. чтобъ ничего не имѣть; и потому 100 руб. составляющіе долгъ, будутъ изображать количество отрицательное, или недостаточное.

ПРИ-

ПРИБАВЛЕНІЕ 1.

§. 15. Почему, когда недостаточное прикладываешь къ положительному, въ самой вещи уничтожаешь, на пр. — 3 † 3 = 0; когдажъ недостаточное вычитаешь изъ положительнаго, тогда въ самой вещи прикладываешь, на пр. — 3 — 3 = — 6. Ибо недостатокъ безъ приложенія уничтоженъ быть не можетъ.

ПРИБАВЛЕНІЕ 2.

§. 16. И какъ одинъ недостатокъ больше другаго быть можетъ; то сумму и разность недостаточныхъ неравныхъ количествъ по справедливости должно принимать въ разсужденіе.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ V.

§. 17. Число приписанное къ какому количеству называется *множителемъ* (coefficiens) того количества, то есть, показываетъ оно, сколько то количество должно взято быть. На пр. 8 x, значитъ, что количество x должно взять восемь разъ, также $\frac{1}{2}$ x- значитъ, что количества x- должно взять половину.

ПРИБАВЛЕНІЕ

§. 18. Почему о всякомъ количествѣ, предъ которымъ хотя и не будетъ находиться явнаго множителя, должно пони-

нимать, что предъ онымъ находится 1. На пр. a-тоже значитъ, что и 1 a; такожъ d f тоже значитъ, что и 1 d f.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ VI.

§. 19. *Количества подобныя* (quantitates similes) называются всѣ тѣ, которыя означаются одинакими буквами, хотя въ прочемъ будутъ имѣть разныхъ множителей. На пр. 3 a b c и 5 a b c суть количества подобныя. На противъ того *количества неподобныя* (quantitates dissimiles) суть тѣ, которыя означаются разными буквами. На пр. 3 a b d и 3 a b c суть количества неподобныя.

ПОЛОЖЕНІЕ VI.

§. 20. Знакъ подобія такойже и здѣсь употребляется, какой въ Ариѳметикѣ и Геометріи употребляемъ былъ. На пр. $\backsim$.

ГЛАВА ВТОРАЯ.

О *Первыхъ дѣйствіяхъ Алгебраическаго численія.*

ОПРЕДѢЛЕНІЕ VII.

§. 21.

Приведеніе (reductio) есть такое дѣйствіе, чрезъ которое количества, не перемѣняя содержанія оныхъ, приводятся въ простѣйшей видъ.

ПРИ-

ПРИМѢЧАНІЕ 1.

§. 22. Сіе дѣйствіе утверждается на слѣдующихъ двухъ правилахъ: 1. для удобнѣйшаго сношенія между собою количествъ, означенныхъ буквами, полезно въ постановленіи буквъ наблюдать порядокъ азбучной. На пр. количество $ba+c-d+ed+db-cba$ лучше изображено быть можетъ такъ: $ab-abc+bd+c-d+de$. 2. Многія подобныя количества приводятся къ одинакому; а тѣ, которыя другъ друга уничтожаютъ, выбросываются. На пр. вмѣсто $ab+ab+cd$ лучше и короче можно изобразить $2ab+cd$; вмѣсто $aa+2ac+3ac$ простѣе можно написать $aa+5ac$; вмѣсто $ab+bb+cd-bb$ лучше можно изобразить $ab+cd$; ибо $+bb$ и $-bb$ взаимно другъ друга уничтожаютъ; на конецъ вмѣсто $a-3b-4b$ короче можно написать $a-7b$.

ПРИМѢЧАНІЕ 2.

§. 23. Количество Алгебраическое сложное изъ многихъ другихъ количествъ не перемѣняетъ своего знаменованія, когда въ буквахъ, означающихъ оное, не будетъ наблюдаемъ вышепомянутой порядокъ. На пр. естьли вмѣсто $a+b-c$ напишешь $b-c+a$, или $-c+a+b$; то изъ того никакой въ знаменованіи количествъ перемѣны

мѣны не произойдетъ: ибо одно премѣненіе порядка въ буквахъ не перемѣняетъ знаменованія какъ частей, такъ и цѣлаго.

ТЕОРЕМА I.

§. 24. Всякое количество за единицу принято быть можетъ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Когда всякое количество само въ себѣ есть одно, и къ другому опредѣленному количеству, какъ бы къ единицѣ не относится; то само оно за единицу принято быть можетъ.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ VIII.

§. 25. *Сложеніе Алгебраическое* (additio algebraica) есть такое дѣйствіе, чрезъ которое количества, означенныя буквами, пишутся по порядку съ приложеніемъ къ положительнымъ количествамъ знака †, а къ недостаточнымъ знака —, и потомъ, ежели можно, дѣлается приведеніе оныхъ.

ЗАДАЧА I.

§. 26. Сложить количества, съ одинакими и разными знаками находящіяся.

РѢШЕНІЕ.

1. Когда количества имѣютъ одинакіе знаки; то складывай оныя вмѣстѣ, какъ и въ Ариѳметикѣ.

2. Когда количества будутъ съ разными знаками, тогда сложеніе перемѣняет-

ся

ся въ вычитанiе, то есть, тогда ме́ньшее количество вычитается изъ бо́льшаго и предъ остаткомъ ставится знакъ бо́льшаго количества.

3. Естьлижъ количества будутъ означены разными буквами; то оныя соединяются между собою чрезъ знакъ †. На пр.

4a † 2b — 2c — 5d — g
5a — 2b † 6c † 2d — 3g
____
9a † 4c — 3d — 4g сумма

a — b
c
______
a — b † c сумма.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Когда всякая буква, которою означается количество, можетъ принята быть за единицу (§. 18. и 24); то означенныя одинакою буквою количества можно считать, какъ вещи одного роду (§. 44. Ариѳ); а что количествъ съ разными знаками находящихся сложенiе перемѣняется въ вычитанiе, и предъ остаткомъ ставится знакъ бо́льшаго количества, сiе яснѣе можно видѣть изъ слѣдующаго примѣра: положимъ, что должно сложить

руб.	грив.	коп.
7 —	9 —	5
3 †	5 —	9
руб.	грив.	коп.
10 —	4 —	4 сумма

То

То видно, что в сумм 10 руб. не достает 9. гривен; по чему, естьли приложишь 5 гривен, недостаток уменьшится и приведен будет в 4 гривны. Поеликуж не цѣлыя 5 гривен, но без 9 гривен надлежало приложить к суммѣ, и сумма 10 руб. без 4 гривен превосходит настоящую 9. гривнами, и потому оныя надлежало отнять. Также, когда в верьхнем числѣ, с которым складывается нижнее, находятся 5. копѣек, сіи дѣйствительно отняты быть могут, недостающіяж 4. копѣйки надлежит замѣтить как недостаток. И так по справедливости сложеніе количеств, с разными знаками находящихся, премѣняется в вычитаніе и пред остатком ставится знак бо́льшаго количества. Ч. н. д.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ IX.

§. 27. *Вычитаніе Алгебраическое* (Subtractio algebraica) есть, такое дѣйствіе, чрез которое количества, означенныя буквами, пишутся одно под другим по порядку с принадлежащими им знаками и пото́м находится разность оных.

ТЕОРЕМА II.

§. 28. В вычитаніи простых, или составных количеств, знаки вычитаемаго коли-

количества перемѣняются въ противные, то есть, † въ —, а — въ †.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Ежели количество c † d вычтешь изъ количества a † b; то разность оныхъ будетъ a † b — c — d, и потому знакъ † въ вычитаемомъ количествѣ перемѣняется въ знакъ —; но ежели количество c — d вычтешь изъ количества a † b; то, когда цѣлое c вычтено будетъ, вычтешь больше, нежели надлежало; и потому то, что больше вычтено на пр. d-надлежитъ приложить. Слѣдовательно будетъ разность данныхъ количествъ a † b — c † d, то есть, въ семъ случаѣ знакъ — перемѣняется въ †. Ч. н. д.

ЗАДАЧА II.

§. 29. Вычесть количества, съ одинакими и разными знаками находящіяся.

РѢШЕНІЕ

1. Когда количества имѣютъ одинакіе знаки и мéньшее количество должно вычитать изъ бóльшаго; то дѣлай вычитаніе такъ, какъ и въ Ариѳметикѣ дѣлалъ.

2. Естьли должно будетъ вычитать мéньшее количество изъ бóльшаго; то вычти мéньшее изъ бóльшаго и предъ остаткомъ поставь знакъ —, когда вычитаемыя количества будутъ съ знакомъ †; напро

противЪ того предЪ остаткомЪ поставь знакЪ †, когда тѣ количества будутЪ сЪ знакомЪ —.

3. Когда вычитаемыя количества будутЪ сЪ разными знаками; то сложи тѣ количества, между коими надлежало дѣлать вычитаніе, и предЪ суммою оныхЪ поставь знакЪ того количества, изЪ котораго вычитать надлежало.

4. Естьли количества будутЪ означены разными буквами; то вЪ такомЪ случаѣ знаки вычитаемаго количества токмо перемѣняются вЪ противные. На пр.

	руб. грив. коп.
8a — 5c † 9d	8 — 5 † 9
6a — 8c — 7d	6 — 8 — 7
2a † 3c † 16d	2 † 3 † 16 разность.

a † b — c	a † d
d — e † f	c — e — g
a†b—c—d†e—f разность	a†d—c†e†g разность

9b † 15c — 7d † 8e — f
6b † 20c — 9d — 9e † 7f
3b — 5c † 2d † 17e — 8f разность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Поелику количества означенныя одинакими буквами суть единицы одного и тогожЪ роду (§. 24.); того ради и вычитаніе

нїе оныхъ дѣлается какъ простыхъ чиселъ въ Ариѳметикѣ. Но когда бóльшее количество вычитается изъ мéньшаго, и оба оныя имѣютъ знакъ †, на пр. 20c изъ 15c; то отнимается 20c, напротивъ того въ верьху должно прибавить 15c, чего ради недостаетъ еще столько c, сколько разности находится между 20 и 15, а имянно 5. Когдажъ вычитаемыя количества будутъ съ знакомъ —, на пр. когда надлежитъ вычитать — 9d изъ — 7d; то — 9d должно придать, потому что съ лишкомъ вычтено; ибо надлежало отнять токмо 20c — 9d, а отнято цѣлые 20c, и поелику въ верьху не достаетъ 7d; то изъ придаваемыхъ 9d уничтожаются 7, и остаются только еще 2d. Того ради въ такихъ случаяхъ надлежитъ всегда вычитать только мéньшее изъ бóльшаго и предъ остаткомъ ставить знакъ противной, то есть, — вмѣсто †, а † вмѣсто —. Наконецъ, когда количества бываютъ съ разными знаками, и должно на пр. вычесть — 9e изъ † 8e; извѣстно изъ предыдущаго, что — 9e должно придать для того, что напереди съ лишкомъ вычтено; и такъ будетъ † 17e. Напротивъ того, когда должно будетъ, на пр. † 7f вычесть изъ — f; то въ такомъ случаѣ

недостаетъ одного f въ верьху, отнимаяжъ еще 7f, будетъ недоставать всего 8f; чего ради въ обоихъ случаяхъ требуется только сложить оныя количества и предъ суммою ихъ поставить знакъ находящейся при томъ количествѣ, изъ котораго вычитается. Ч. н д.

ПРИМѢЧАНІЕ.

§. 30. Въ Ариѳметикѣ сказано было, что числа слагаемыя должны быть одного роду (§. 44. Ариѳ.); то удивительно покажется, для чего въ Алгебрѣ положительныя количества съ недостаточными, и обратно недостаточныя съ положительными складываются и вычитаются, когда оныя суть разнородныя. Но обстоятельнѣе разсматривая увидишь, что недостаточное количество никогда не складывается съ положительнымъ и изъ онаго не вычитается; но въ сложеніи вычитается потому, что болѣе, нежели надлежало, придано было, а въ вычитаніи складывается потому, что болѣе, нежели надлежало, вычтено было.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ X.

§. 31. *Умноженіе алгебраическое* (multiplicatio algebraica) есть такое дѣйствіе, чрезъ которое умножаемыя между собою количества, означенныя буквами, пишутся

по

по порядку одно подъ другимъ съ принадлежащими имъ знаками, и потомъ находится произведенie оныхъ.

ТЕОРЕМА III.

§. 32. Одинакie знаки умножаемыхъ между собою количествъ въ произведенiи дѣлаютъ †, а разные —.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Когда † на † умножается, то видно, что и произведенie должно имѣть †. Равнымъ образомъ не трудно понять, что въ произведенiи долженъ быть знакъ —, когда † на — умножается, потому что недостатокъ нѣсколько разъ берется. Но когда умножается — на —, то не весьма ясно кажется, для чегобъ въ произведенiи былъ знакъ †, и потому надлежитъ примѣчать, что когда на пр. 3 — 2 умножаются на — 2, недостатокъ — 2 столько разъ берется, сколько 3 — 2 единицъ имѣетъ, то есть, какъ въ семъ случаѣ одинъ разъ (§. 60. Ариѳ.). Но когда 3 съ начала умножатся на — 2; то недостатокъ — 2 возьмется три раза, и потому два раза чрезъ лишекъ; того ради должно его еще два раза назадъ придать; и такъ — 2 на — 2 дѣлаютъ въ произведенiи † 4. Ч. н. д.

ЗАДАЧА III.

§. 33. Умножить между собою количества, съ одинакими и разными знаками находящiяся.

РѢШЕНIЕ.

Умножай между собою количества, означенныя буквами такъ, какъ простыхъ чиселъ умноженiе въ Ариѳметикѣ дѣлано было, наблюдая притомъ только то, что одинакiе знаки въ произведенiи дѣлаютъ †, а разные —. На пр.

a † b — d	10 = 8 † 4 — 2
a — b — d	2 = 8 — 4 — 2
— a d — b d † d d	— 16 — 8 † 4
— a b — b b † b d	— 32 — 16 † 8
a a † a b — a d	64 † 32 — 16
aa — bb — 2 a d † dd произведенiе	10 - 88 = 20
a † c	9 † 2 = 11
b † d	7 † 3 = 10
a d † c d	2 7 † 6
a b † b c	6 3 † 14
a b † a d † b c † c d	6 3 † 14 † 27 † 6 = 110

ОПРЕДѢЛЕНIЕ XI.

§. 34. *Дѣленiе алгебраическое* (divisio algebraica) есть такое дѣйствiе, чрезъ которое дѣлимыя между собою количества, означенныя буквами, пишутся по порядку съ принадлежащими имъ знаками, и потомъ находится частное число оныхъ.

ЗАДАЧА IV.

§. 35. Раздѣлить между собою количества, съ одинакими и разными знаками находящїяся.

РѢШЕНIЕ.

1. Когда одно данное количество можетъ дѣйствительно раздѣлено быть на другое, тогда поступай такъ, какъ при дѣленiи простыхъ чиселъ въ Ариѳметикѣ поступлено было, наблюдая притомъ только то, что одинакiе знаки въ частномъ числѣ дѣлаютъ +, а разные —.

2. Естьлижъ дѣйствительнаго дѣленiя учинить не можно будетъ; то въ такомъ случаѣ поступай такъ, какъ выше сего сказано (§. 8. и 9.). На пр.

$a-b-d \mid aa-bb-2ad+dd \mid a+b-d$ частное число

$aa-ab-ad$

$+ab-bb-ad+dd$

$+ab-bb-bd$

$+bd-ad+dd$

$+bd-ad+dd$

0

$\frac{a+b}{c}$, или $(a+b):c$, или $\overline{a+b}:c$

$b+d \mid ab+ad+bc+cd \mid a+c$

$ab+ad$

$$bc + cd$$
$$bc + cd$$
$$0$$

$$9 + 2 \mid 63 + 14 + 27 + 6 \mid 7 + 3$$
$$63 + 14$$
$$27 + 6$$
$$27 + 6$$
$$0$$

ПРИМѢЧАНІЕ

§. 36. Поелику буквы, не какъ числа, не имѣютъ знаменованія по мѣсту, на коемъ находятся; то здѣсь нѣтъ нужды наблюдать порядокъ, но можно искать частное число во всякомъ членѣ, въ которомъ найти его можно; что также можетъ служить въ вычитаніи и въ произведеніи изъ дѣлителя на частныя числа. На. пр.

$$2a + b - 2d \mid 4aa + 4ab - 4ac - 14ad + bb - 2bc - 7bd + 4cd + 10dd.$$
$$\mid 2a + b - 2c - 5d.$$
$$4aa + 2ab - 4ac - 10ad$$
$$2ab \quad - \quad 4ad$$
$$2ab \quad + bb \quad 2bc - 5bd + 4cd + 10dd$$
$$-4ad \quad - \quad 2bd$$
$$-4ad \quad - \quad 2bd$$
$$0$$

ГЛАВА ТРЕТІЯ

о

Количествахъ алгебраическихъ, представленныхъ въ дробяхъ, или ломаныхъ числахъ.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XII.

§. 37.

Количество алгебраическое, представленное въ дробяхъ (fractio algebraica) есть не что иное, какъ изображеніе геометрическаго содержанія.

ПРИБАВЛЕНІЕ

§. 38. Почему въ алгебраическихъ дробяхъ такимъ же образомъ, какъ и въ Ариѳметикѣ, дѣлимое количество *числителемъ* (numerator) а дѣлящее количество *знаменателемъ* (denominator) называется. На. пр. $a : b = \frac{a}{b}$

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XIII.

§. 39. Дробь, въ которой числитель къ знаменателю содержится, какъ часть къ цѣлому, называется *собственною*, или *правильною* (propria). Дробижъ, въ которыхъ числители къ своимъ знаменателямъ содержатся, какъ цѣлое къ части, или какъ равное къ равному, именуются *несобственными*, или *неправильными* (impropriae).

ПРИБАВЛЕНІЕ 1.

§. 40. Изъ чего явствуетъ, что всякое алгебраическое количество, представленное въ дроби, имѣетъ свойство дѣленія, и обратно всякое дѣленіе алгебраическое пріемлетъ на себя свойство дѣленія.

ПРИБАВЛЕНІЕ 2.

§. 41. И такъ тѣ дроби почитаются *равными* (aequales), въ которыхъ числители къ своимъ знаменителямъ имѣютъ одинакое содержаніе.

ПРИМѢЧАНІЕ.

§. 42. Поелику алгебраическія количества, представленныя въ дробяхъ, во всѣхъ дѣйствіяхъ, то есть, въ сложеніи, вычитаніи, умноженіи и дѣленіи тѣмъже пра́виламъ послѣдуютъ, какимъ въ Ариѳметикѣ послѣдовали ломаныя чи́сла; того ради одни токмо примѣры оныхъ здѣсь предложены быть имѣютъ.

ЗАДАЧА V.

§. 43. Привести къ одному знаменателю количества алгебраическія, представленныя въ дробяхъ, кои имѣютъ разныхъ знаменателей.

РѢШЕНІЕ.

Первой случай. Ежели даны будутъ двѣ дроби; то въ такомъ случаѣ числителя

и знаменателя первой дроби умножь на знаменателя второй, а числителя и знаменателя второй на знаменателя первой; дроби, изъ того произшедшія, будутъ имѣть одинакихъ знаменателей. На пр. даны дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, или $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$; то приведены будутъ къ одному знаменателю слѣдующимъ образомъ;

$$\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{ad}{bd} \qquad \frac{c \times b}{d \times b} = \frac{bc}{bd}$$

$$\frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12} \qquad \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12}$$

Второй случай. Естьли дано будетъ привести къ одному знаменателю нѣсколько дробей, на пр. $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$, то 1) числителя и знаменателя первой дроби умножь на знаменателя второй и третьей, 2) числителя и знаменателя второй на знаменателя первой и третьей; 3) наконецъ числителя и знаменателя третьей на знаменателя первой и второй; дроби изъ того произшедшія, будутъ имѣть одинакихъ знаменателей. На пр.

$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ или $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}$

$$\frac{a}{b}\times\frac{d}{d}=\frac{ad}{bd}\times\frac{f}{f}=\frac{adf}{bdf}\qquad\frac{2}{3}\times\frac{2}{2}=\frac{4}{6}\times\frac{5}{5}=\frac{20}{30}$$

$$\frac{c}{d}\times\frac{b}{b}=\frac{bc}{bd}\times\frac{f}{f}=\frac{bcf}{bdf}\qquad\frac{1}{2}\times\frac{3}{3}=\frac{3}{6}\times\frac{5}{5}=\frac{15}{30}$$

$$\frac{e}{f}\times\frac{b}{b}=\frac{be}{bf}\times\frac{d}{d}=\frac{bde}{bdf}\qquad\frac{2}{5}\times\frac{3}{3}=\frac{6}{15}\times\frac{2}{2}=\frac{12}{30}$$

ПРИБАВЛЕНІЕ.

§. 44. Изъ чего явствуетъ, что чрезъ приведеніе дробей къ одному знаменателю не перемѣняется содержаніе оныхъ потому, что въ такомъ случаѣ два члена одного и тогожъ содержанія умножаются на одно количество (§. 141. Ариѳ.).

ПРИМѢЧАНІЕ.

§. 45. Такимъже образомъ должно поступать, когда будетъ дано больше дробей, то есть, и въ такомъ случаѣ надлежитъ каждой дроби числителя и знаменателя умножать на знаменателей прочихъ всѣхъ дробей.

ЗАДАЧА VI.

§. 46. Сложить количества алгебраическія, представленныя въ дробяхъ.

РѢШЕНІЕ.

1. Сперьва приведи дроби къ одному знаменателю (§. 43.).

2. Подъ суммою числителей подпиши общаго ихъ знаменателя; такимъ образомъ произойдетъ сумма данныхъ дробей. На пр. дано $\frac{ab}{c}$ сложить съ $\frac{df}{g}$; то будетъ.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{ab \times g}{c \times g} = \frac{abg}{cg} \\ \frac{df \times c}{g \times c} = \frac{cdf}{cg} \end{array}\right\} \frac{abg + cdf}{cg} \text{ сумма.}$$

Или въ числахъ $\frac{2}{3}$ сложить съ $\frac{3}{5}$; то будетъ.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{2 \times 5}{3 \times 5} = \frac{10}{15} \\ \frac{3 \times 3}{5 \times 3} = \frac{9}{15} \end{array}\right\} \frac{10 + 9}{15} \text{ сумма.}$$

ЗАДАЧА VII

§. 47. Вычесть количества алгебраическія, представленныя въ дробяхъ.

РѢШЕНІЕ.

1. Сперьва приведи данныя дроби къ одному знаменателю (§. 43.).

2. Потомъ числителя одной дроби изъ числителя другой вычтя, подпиши общаго знаменителя; такимъ образомъ произойдетъ данныхъ дробей разность. На. пр. изъ $\frac{a}{b}$ вычесть $\frac{c}{d}$; также въ числахъ изъ $\frac{3}{4}$ вычесть $\frac{2}{3}$; то будетъ.

$$\left.\begin{array}{l} \overline{a}\times d = \overline{ad} \\ \overline{b}\times d = \overline{bd} \end{array}\right\} \frac{ad - bc}{db} \text{ разность } \left\{\begin{array}{l} \overline{c}\times b = \overline{bc} \\ \overline{b}\times d = \overline{bd} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{3}\times 3 = \overline{9} \\ 4\times 3 = 12 \end{array}\right\} \frac{9 - 8}{12} \text{ разность } \left\{\begin{array}{l} \overline{2}\times 4 = \overline{8} \\ 3\times 4 = 12 \end{array}\right.$$

ПРИМѢЧАНІЕ.

§. 48. Ежели случится составное алгебраическое количество, представленное въ дробяхъ съ цѣлыми, вычесть изъ составнагожъ съ цѣлыми; то въ такомъ случаѣ сперьва цѣлыя, при дробяхъ находящіяся, приведи въ неправильную дробь (§. 211. Ариѳ), потомъ къ одному знаменателю (§. 43.) и наконецъ вычитай одну изъ другой показаннымъ образомъ. На пр. изъ $2y\frac{bb}{f}$ вычесть $a - \frac{cx}{d}$; то будетъ

$$2y\times f = \frac{2yf + bb}{f}$$
$$a\times d = \frac{ad - cx}{d}$$

цѣлыя, при дробяхъ находящіяся, приведены въ неправильную дробь.

$$\frac{2yf+bb}{f}\ \frac{\times d}{\times d} = \frac{2yfd+bbd}{df}$$
$$\frac{ad-cx}{d}\ \frac{\times f}{\times f} = \frac{adf-cfx}{df}$$

дроби приведены къ одному знаменателю.

$$\frac{2yfd + bbd - adf + cfx}{df} \text{ разность}$$

ЗАДАЧА VIII.

§. 49. Умножить между собою количества алгебраическія, представленныя въ дробяхъ.

РѢШЕНІЕ.

Перпой случай. Ежели будутъ даны дроби безъ цѣлыхъ; то числителя одной на знаменителя другой умножь, произойдетъ изъ того желаемое произведеніе данныхъ дробей. На пр. $\frac{a}{b}$ умножить на $\frac{c}{d}$; то будетъ.

$$\frac{a \times c = ac}{b \times d = bd}$$ произведеніе

Второй случай. Ежели при дробяхъ будутъ находиться цѣлыя; то въ такомъ случаѣ, приведши цѣлыя въ непра́вильную дробь (§. 211. Ариѳ.), умножь показаннымъ образомъ, и произойдетъ желаемое произведеніе. На пр. $\frac{bx}{a} - y$ умножить на $\frac{bx}{a} + y$; то будетъ

$$\frac{bx - ay}{a} \times \frac{bx + ay}{a} = \frac{bbxx - bxay + bxay - aayy}{aa},$$

или $\frac{bbxx - aayy}{aa}$ (§. 21 и 22.) произведеніе.

Также въ числахъ $\frac{3}{7}$ умножить на $\frac{\ }{5}$; то будетъ

$\frac{2}{7}$

$\frac{3}{7} \times = \frac{4}{5} \ \frac{12}{35}$ произведенiе

или $5\frac{3}{4}$ утножить $7\frac{5}{6}$; то будетЪ

$5\frac{4}{3} = \frac{23}{4} - \frac{23}{4} \times \frac{47}{6} = -\frac{1081}{24}$ произведенiе

$7\frac{5}{6} = \frac{47}{6}$

ЗАДАЧА IX.

§. 50. РаздЂлить между собою количества алгебраическiя, представленныя вЪ дробяхЪ.

РЂШЕНIЕ

1. Числителя дЂлимой дроби умножЪ на знаменателя дЂлящей, произведенiе изЪ того будетЪ числитель частнаго числа.

2. Знаменателя дЂлимой дроби умножЪ на числителя дЂлящей, произведенiе изЪ того будетЪ знаменатель частнаго числа.

На. пр. $\frac{a}{b}$ раздЂлить на $\frac{c}{d}$; то будетЪ

$$\frac{a \times d}{b \times c} = \frac{ad}{bc}$$ частное число

вЪ числахЪ $\frac{3}{4}$ раздЂлить на $\frac{2}{9}$; то будетЪ

$$\frac{3 \times 9}{4 \times 2} = \frac{27}{8}$$ частное число.

Также $\frac{ab - ce}{d}$ должно раздЂлить на $\frac{aa}{c}$; то будетЪ

$$\frac{ab - ce \times c}{d \times aa} = \frac{abc - cce}{aad}$$ частное число.

ГЛАВА

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

о

Свойствѣ степеней и ирраціональныхъ количествъ

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XIV.

§. 51.

Когда какое количество будетъ умножено само на себя; то произшедшее изъ того произведеніе называется *вторая степень* (secunda potentia, vel dignitas), или *квадратъ* (qvadratum) того количества. Когдажъ вторая *степень* умножится на первую; то изъ того происходитъ *третья степень* (tertia potentia, vel dignitas), или *кубъ*, (cubus); умноживъ третью на первую, получишь *четвертую степень* (quartam potentiam, vel dignitatem), или *биквадратъ* (biqvadratum); а изъ умноженія четвертой степени на первую происходитъ *пятая степень* (quinta potentia, vel dignitas), или *суперсолидъ* (supersolidus) и такъ далѣе. Первоначальноежъ количество именуется *первою степенью* (prima potentia, vel dignitas), или *радиксомъ* (radix) той, или другой степени.

ПОЛОЖЕНІЕ VII.

§. 52. Возвышенное количество въ такую, или другую степень означается цыфрою. На пр. естьли будетъ изображено

a^2; то значитъ, что количество а возвышено во вторую степень; когдажъ a^3, тогда значитъ, что количество а находится въ третьей степени; а когда a^4, тогда въ четвертой; и такъ далѣе.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XV.

§. 53. Чи́сла надписанныя надъ количествами называются *указателями*, или *знаменателями* (exponentes) степеней. На пр. надъ количествомъ x^3, число 3 надписанное есть знаменитель, или указатель той степени, въ какую то количество возвышено, то есть, показываетъ оно, что количество x находится въ третьей степени. Когдажъ какое количество не будетъ имѣть надписаннаго знаменителя, тогда почитается оно находящимся въ первой степени.

ПРИМѢЧАНІЕ

§. 54. Естьли какое количество будетъ изображено такимъ образомъ x^n, то сіе означаетъ, что изъ количества x не можно извлечь полнаго, или совершеннаго радикса.

ПРИБАВЛЕНІЕ 1.

§. 55. Изъ чего явствуетъ, что когда должно будетъ одну степень на другую умножить, тогда складываются только ихъ знименители (§. 288. Ариѳ.). На пр.

x

$$x^{3}$$
$$x^{4}$$
$$\overline{x^{7}}$$

$$y^{m}$$
$$y^{r}$$
$$\overline{y^{m+r}}$$

ПРИБАВЛЕНІЕ 2.

§. 56. Напротивъ того когда должно будетъ одну степень раздѣлить на другую, тогда надлежитъ только знаменателей ихъ между собою вычесть (§. 292. Ариѳ.). На пр.

$$a^{5} : a^{2} = a^{3} ; x^{m+n} : x^{n} = x^{m}$$

ПРИБАВЛЕНІЕ 3.

§. 57. Наконецъ, ежели какую степень, взятую за радиксъ, надобно будетъ возвысить въ другую степень, въ такомъ случаѣ надлежитъ только умножить знаменателя первой степени на знаменателя другой. На пр. ежели количество x^{3}, находящееся въ третьей степени, надобно возвысить въ четвертую степень; то умножь только 3 на 4, и получишь желаемое, то есть, $x^{3\times4} = x^{12}$.

ПРИБАВЛЕНІЕ 4.

§. 58. Слѣдовательно, когда изъ данной степени должно будетъ извлечь требуемой радиксъ, надлежитъ только зна-

менателя ея раздѣлить на знаменателя той степени, коей радиксъ требуется, то есть, для квадратнаго радикса должно раздѣлить на 2, для кубическаго на 3, для биквадратнаго на 4, и такъ далѣе. На пр. радиксъ квадратной изъ a^6 есть $a^{6:2} = a^3$, радиксъ кубической изъ a^6 есть $a^{6:3} = a^2$; и проч.

ПРИБАВЛЕНІЕ 5.

§. 59. Изъ чего явствуетъ, что радиксы количествъ принимаемы быть могутъ за такія степени, коихъ знаменатели суть дроби (§. 204. Ариѳ.).

ПОЛОЖЕНІЕ VIII.

§. 60. Знакъ радикальной такой же и здѣсь, какой въ Ариѳметикѣ, употребляется. На пр. $\sqrt[3]{x}$ значитъ, что изъ количества x должно извлечь кубической радиксъ.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XVI.

§. 61. *Радикальныя*, (radicales) *несоизмѣримыя*, (incommenſurabiles), *ирраціональныя*, (irrationales) *и глухія количества* (surdae quantitates) суть тѣ, изъ которыхъ настоящаго радикса желаемой степени извлечь не можно.

ПРИМѢЧАНІЕ 1.

§. 62. Такіе радиксы обыкновенно, какъ бы настоящіе и истинные, поставляются подъ

подъ знакомъ радикальнымъ. На пр. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{15}$ и проч. Напротивъ того тѣ радиксы, кои извлечены быть могутъ безъ остатка изъ данныхъ количествъ, на пр. $\sqrt{16}$, или $\sqrt[3]{27}$, поставляются безъ радикальнаго знака, такимъ образомъ: 4, или 3.

ПРИМѢЧАНІЕ 2.

§. 63. Ежели несоизмѣримое количество, возвышенное въ какую нибудь степень, будетъ имѣть надписаннаго знаменателя степени, равнаго числу, надъ знакомъ радикальнымъ надписанному; то въ такомъ случаѣ никакой перемѣны не произойдетъ изъ того, когда оно безъ надписаннаго знаменителя степени поставлено будетъ предъ знакомъ радикальнымъ. На пр. вмѣсто $\sqrt[3]{a^3 b}$ можно поставить $a\sqrt[3]{b}$

ПРИБАВЛЕНІЕ.

§. 64. Изъ чего явствуетъ, что несоизмѣримыя количества могутъ приведены быть въ простѣйшей видъ. На пр. вмѣсто $\sqrt{a^2 b}$, можно поставить $a\sqrt{b}$ (§. 63.). Также въ числахъ: вмѣсто $\sqrt{12} = \sqrt{4} \times \sqrt{3}$ можно поставить $2\sqrt{3}$, вмѣсто $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{27}$ можно поста-

вить $3\sqrt[3]{2}$, вмѣсто $\sqrt[3]{72} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{9}$ можно поставить $2\sqrt[3]{9}$, такожъ вмѣсто $\sqrt{50} = \sqrt{25} \times \sqrt{2}$ можно поставить $5\sqrt{2}$ и вмѣсто $\sqrt{18} = \sqrt{9} \times \sqrt{2}$ можно поставить $3\sqrt{2}$, и такъ далѣе.

ПРИМѢЧАНІЕ.

§. 65. Такія количества, какъ два послѣднія, на пр. $5\sqrt{2}$ и $3\sqrt{2}$, почитаются *соизмѣримыми* (commensurabiles) между собою, по елику оныя какъ послѣ знаковъ радикальныхъ оказываются одинаковыми, такъ и знакъ радикальной имѣютъ одинакой. Называются жъ въ особливости соизмѣримыми между собою потому, что содержаніе оныхъ по крайней мѣрѣ въ числахъ изображено быть можетъ; ибо оныя содержатся между собою, какъ $5 : 3$.

ЗАДАЧА X.

§. 66. Привести къ одному наименованію ирраціональныя количества разнаго наименованія.

РѢШЕНІЕ.

Положимъ, что должно привести къ одному наименованію количества $\sqrt[m]{x^n}$ и $\sqrt[s]{y^r}$; то, поелику $\sqrt[m]{x^n} = x^{n:m}$ и $\sqrt[s]{y^r} = y^{r:s}$ (§. 58.), разность наименованія зависитъ отъ разныхъ

ныхъ знаменателей, знаменателижъ нѣчто иное суть, какъ дроби (§. 59.), которыя въ другія имъ равныя, но подъ однимъ знаменателемъ состоящія приведены быть могутъ (§. 222. Ариѳ.); слѣдовательно количества ирраціональныя приводятся къ одному наименованію чрезъ приведеніе знаменателей ихъ къ одному знаменованію. ч. н. с. и. д.

Положимъ, что должно привести количества $x^{n:m}$ и $y^{r:s}$ къ одному наименованію; то будутъ приведены $x^{ns:ms}$ и $y^{mr:ms}$, или $x^{n:m} = \sqrt[ms]{x^{ns}}$ и $y^{r:s} = \sqrt[ms]{y^{mr}}$; также $\sqrt{2} = 2^{1:2}$ и $\sqrt[3]{5} = 5^{1:3}$ будутъ приведены $2^{3:6}$ и $5^{2:6}$, то есть, $\sqrt[6]{2^3}$ и $\sqrt[6]{5^2}$, или дѣйствительно возвысивъ въ третью и во вторую степень, будешь имѣть $\sqrt[6]{8}$ и $\sqrt[6]{25}$.

ЗАДАЧА XI.

§. 67. Изобразить простѣе ирраціональныя количества.

РѢШЕНІЕ.

Хотя выше сего (§. 64.) и упомянуто было, что ирраціональныя количества могутъ приведены быть въ простѣйшей

видъ; однако здѣсь обстоятельнѣе о томъ предлагается; то есть.

1. Находящееся подъ знакомъ радикальнымъ количество раздѣли на равную радиксовому знаку степень, на пр. на кубъ, когда ирраціональное количество будетъ кубической радиксъ; естьлижь сего учинить не возможно; то почитать, что количество ирраціональное простѣе изображено быть не можетъ.

2. Частное число поставь подъ знакомъ радикальнымъ и предъ онымъ, вмѣсто множителя, радиксъ той степени, на которую дѣлилъ. На пр. $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8} \times 3 = 2\sqrt[3]{3}$; $\sqrt{18} = \sqrt{9} \times 2 = 3\sqrt{2}$; $\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{16} \times 3 = 2\sqrt[4]{3}$.

ПРИБАВЛЕНІЕ 1.

§. 68. Ежели ирраціональныя количества одной степени, въ простѣйшій видъ приведенныя, подъ знаками радикальными составятъ одинакое количество; то оныя будутъ содержаться между собою, какъ раціональныя количества, предъ знаками находящіяся; слѣдовательно ирраціональныя количества могутъ быть соизмѣримыя между собою. На пр. $\sqrt{8} =$

$\sqrt{4} \times 2 = 2\sqrt{2}$, и $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$; по чему $2\sqrt{2} : 3\sqrt{2} = 2 : 3$. (§. 65.).

ПРИБАВЛЕНІЕ 2.

§. 69. И такъ количество отъ части раціональное, отъ части ирраціональное приводится въ точное ирраціональное, когда оно возвышается въ такую степень, какую показываетъ надписанной надъ знакомъ радикальнымъ знаменатель, и притомъ оная степень умножится на количество, подъ знакомъ радикальнымъ находящееся. На пр. $5\sqrt{3} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{50}$, и $5\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{125 \times 3} = \sqrt[3]{375}$

ПРИМѢЧАНІЕ.

§. 70. Ежели захочешь сыскать то, какимъ бы образомъ можно было узнать при рѣшеніи, дѣлится ли количество, подъ знакомъ радикальнымъ находящееся, на какую желаемую степень, или нѣтъ, и какая та будетъ степень? то въ такомъ случаѣ должно раздѣлить оное количество на дѣлители, между коими непремѣнно должны имѣть мѣсто всѣ степени, начиная отъ первой до желаемой. На пр. спрашивается, количество $\sqrt[4]{368}$ можетъ ли

раздѣлиться на четвертую степень; то число 368 разбивъ на его дѣлители, на пр.

2	- - -	184
4	- - -	92
8	- - -	46
16	- - -	23

Отвѣдывай дѣленіе чрезъ меньшія числа, и частныя большія числа съ боку замѣчая, найдешь 2 первую степень, 4 вторую степень, 8 третью степень и 16 четвертую степень; слѣдовательно 16 есть искомой дѣлитель, и потому $\sqrt[4]{368} = 2\sqrt[4]{23}$.

ЗАДАЧА XII.

§. 71. Сложить ирраціональныя количества, или одно изъ другаго вычесть.

РѢШЕНІЕ

1. Ежели количества ирраціональныя будутъ соизмѣримыя; то складываются, или вычитаются только числа, предъ знакомъ радикальнымъ находящіяся. На пр.

$4\sqrt{6} + 3\sqrt{6} = 7\sqrt{6}$ сумма.

$7\sqrt{6} - 3\sqrt{6} = 4\sqrt{6}$ разность.

Также $\sqrt{8} + \sqrt{18} = \sqrt{4\times2} + \sqrt{9\times2} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = \sqrt{25\times2}\ \sqrt{50}$ сумма.

$\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{8\times3} + \sqrt[3]{27\times3} = 2\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{3} = 5\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{125\times3} = \sqrt[3]{375}$ сумма,

Или

или $\sqrt{18} - \sqrt{8} = \sqrt{9 \times 2} - \sqrt{4 \times 2} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$ разность.

и $\sqrt[3]{375} - \sqrt[3]{81} = 5\sqrt[3]{3} - 3\sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{8 \times 3} = \sqrt[3]{24}$ разность.

2. Естьлижъ количества будутЪ несоизмѢримыя; то сложенiе и вычитанiе означается знаками $+$ и $-$. На пр. количествѢ $\sqrt{7} \times \sqrt{5}$, поелику суть несоизмѢримыя, будетЪ сумма $\sqrt{7} + \sqrt{5}$; оныхЪже разность $= \sqrt{7} - \sqrt{5}$.

3. РавнымЪ образомЪ надлежитЪ поступать, когда будутЪ даны составныя иррацiонанальныя количества. На пр.

$$\begin{array}{l} 4\sqrt{3} - 5\sqrt{2} + 7\sqrt{7} + 8\sqrt{5} \\ \sqrt{3} + 9\sqrt{2} + 3\sqrt{7} - 4\sqrt{5} \\ \hline 5\sqrt{3} + 4\sqrt{2} + 10\sqrt{7} + 4\sqrt{5} \text{ сумма.} \end{array}$$

то есть, $\sqrt{25 \times 3} + \sqrt{16 \times 2} + \sqrt{100 \times 7}\ \sqrt{16 \times 5}$.

или $\sqrt{75} + \sqrt{32} + \sqrt{700} + \sqrt{80}$.

$$\begin{array}{l} 5\sqrt{2} - 7\sqrt{3} + 8\sqrt{10} \\ 3\sqrt{2} + 5\sqrt{3} - 9\sqrt{10} \\ \hline 2\sqrt{2} - 12\sqrt{3} + 17\sqrt{10} \text{ разность.} \end{array}$$

то есть $\sqrt{4 \times 2} - \sqrt{144 \times 3} + \sqrt{289 \times 10}$.

или $\sqrt{8} - \sqrt{432} + \sqrt{\ } - 2890$.

ЗАДАЧА XIII.

§. 72. Умножить и раздѢлить между собою иррацiональныя количества.

РѢШЕНІЕ

1. Для сысканія произведенія ирраціональныхъ количествъ, умножь, а для сысканія частнаго числа оныхъ, раздѣли количества, предъ знакомъ радикальнымъ и подъ онымъ находящіяся, и въ первомъ случаѣ предъ произведеніемъ, а во второмъ предъ частнымъ числомъ поставь тотъ же радикальной знакъ съ его знаменателемъ.

2. Естьлижь радикальныя количества будутъ разнаго наименованія: то прежде умноженія, или дѣленія, приведи оныя къ одному наименованію (§. 66.), и, ежели можно, изобрази простѣе (§. 67.). На пр.

$\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\sqrt{6}$ произведеніе.

Также $2\sqrt{3}\times4\sqrt{3}=8\sqrt{9}=\sqrt{64\times9}=\sqrt{576}=24$ произв.

$\sqrt{3}+\sqrt{2}$	$\sqrt{2}+\sqrt{3}$
$\sqrt{3}-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}+\sqrt{3}$
$-\sqrt{6}-\sqrt{4}$	$\sqrt{6}+\sqrt{9}$
$\sqrt{9}+\sqrt{6}$	$\sqrt{4}+\sqrt{6}$
3 —— $2=1$ произв.	$2+\sqrt{6}+3$ произв.

$$
\begin{array}{l}
7\sqrt{3}-5\sqrt{2}\\
5\sqrt{8}+3\sqrt{6}\\
\hline
+21\sqrt{18}-15\sqrt{12}\\
35\sqrt{24}-25\sqrt{16}\\
\hline
35\sqrt{24}+21\sqrt{18}-15\sqrt{12}-25\sqrt{16}.
\end{array}
$$

Но поелику $(35\sqrt{24}-25\sqrt{16})=100$;

то

то будетъ $35\sqrt{24} + 21\sqrt{18} - 15\sqrt{12} - 100$ произвед.

$\sqrt{8} : \sqrt{2} = \sqrt{4} = 2$ частное число.

$\sqrt{12} : \sqrt{6} = \sqrt{2}$ частное число.

$\sqrt{48} : \sqrt{12} = \sqrt{4} = 2$ частное число.

или $\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}$ и $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$;

и потому $4\sqrt{3} : 2\sqrt{3} = 2$ частное число.

ГЛАВА ПЯТАЯ

о

Алгебраическомъ составлении квадратовъ и кубовъ и извлечении изъ оныхъ квадратныхъ и кубическихъ радиксовъ.

ЗАДАЧА IV.

§. 73.

Найти свойство квадрата, то есть, составить квадратъ алгебраическимъ образомъ.

РѢШЕНІЕ.

1. Возьми двучастной радиксъ, то есть, состоящей изъ двухъ членовъ, на пр. $a + b$.

2. Оной умножь самъ на себя, то произшедшее изъ того произведеніе будетъ квадратъ, то есть, видно будетъ свойство и составленіе квадрата. На пр.

$$
\begin{array}{r}
a + b \\
a + b \\
\hline
ab + b^2 \\
a^2 + ab \quad \\
\hline
a^2 + 2ab + b^2
\end{array}
$$ квадратъ.

ПРИМѢЧАНІЕ.

§. 74. Изъ самаго дѣйствія видно, какимъ образомъ составляется квадратъ и что оной въ себѣ заключаетъ, то есть, квадратъ изъ двучастнаго радикса произшедшій заключаетъ въ себѣ квадраты обѣихъ частей и сверьхъ того произведеніе изъ первой, или изъ второй части, взятое дважды и умноженное на вторую, или на первую часть.

ЗАДАЧА XV.

§. 75. Извлечь алгебраическимъ образомъ квадратной радиксъ изъ даннаго квадрата.

РѢШЕНІЕ.

1. Квадратъ первой части, на пр a^2 отними отъ прочихъ двухъ членовъ и его радиксъ а поставь на мѣстѣ частнаго числа.

2. Найденное частное число возьми дважды, на пр. 2a и поставь вмѣсто дѣлителя, которой отнявъ, получишь вторую часть радикса, на пр. b.

3. Наконецъ найденную вторую часть радикса взявъ квадратно, на пр. b^2, вычти изъ послѣдняго члена, и произойдетъ желаемой квадратной радиксъ. На пр.

$$\begin{array}{l|l} a^2 + 2ab + b^2 & a + b \text{ квадратной радиксъ.} \\ a^2 & \\ \hline 2a \mid 2ab + b^2 & \\ \quad\;\; 2ab + b^2 & \\ \hline \quad\;\; 0 & \end{array}$$

ПРИМѢЧАНIЕ.

§. 76. Равнымъ образомъ должно поступать, когда квадратъ будетъ составленъ изъ радикса, состоящаго изъ трехъ, четырехъ, или болѣе частей: только то притомъ должно наблюдать, что двѣ, или три и проч. найденныя части радикса принимаются при извлеченiи за одну, какъ то яснѣе видѣть можно изъ слѣдующаго примѣра:

$$\begin{array}{r} a + b + c \\ a + b + c \\ \hline ac + bc + c^3 \\ ab + b^2 + bc \quad \\ a^2 + ab + ac \qquad\quad \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 \end{array}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 \,\big|\, a+b+c$$
$$a^2$$
$$2a \,\big|\, 2ab + b^2$$
$$2ab + b^2$$
$$2a+2b \,\big|\, 2ac + 2bc + c$$
$$2ac + 2bc + c^2$$
$$0$$

$$a + b + c + d$$
$$a + b + c + d$$
$$ad + bd + cd + d^2$$
$$ac + bc + c^2 + cd$$
$$ab + b^2 + bc + bd$$
$$a^2 + ab + ac + ad$$
$$a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 + 2ad + 2bd + 2cd + d^2 \,\big|\, a+b+c+d$$
$$a^2$$
$$2a \,\big|\, 2ab + b^2$$
$$2ab + b^2$$
$$2a + 2b \,\big|\, 2ac + 2bc + c^2$$
$$2ac + 2bc + c^2$$
$$2a + 2b + 2c \,\big|\, 2ad + 2bd + 2cd + d^2$$
$$2ad + 2bd + 2cd + d^2$$
$$0$$

ЗАДАЧА XVI.

§ 77. Найти свойство куба, то есть, составить кубъ алгебраическимъ образомъ.

РѢШЕНІЕ

1. возьми двучастной радиксъ, то есть, состоящій изъ двухъ членовъ, на пр. $a + b$.

2. Умножь оной самЪ на себя; то произойдетЪ квадратЪ.

3. КвадратЪ умножь еще на свой радиксЪ, и произойдетЪ кубЪ, то есть, видно будетЪ свойство и составленіе куба. На пр.

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline ab + b^2 \\ a^2 + ab \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \\ a + b \\ \hline a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ \hline a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{array}$$

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ кубЪ.

ПРИМѢЧАНІЕ.

§. 78. ИзЪ самаго дѣйствія видно, какимЪ образомЪ составляется кубЪ и что оной вЪ себѢ заключаетЪ; то есть, кубЪ изЪ двучастнаго радикса произшедшій заключаетЪ вЪ себѢ кубы обѢихЪ частей и сверьхЪ того квадратЪ первой части взятой трижды и умноженной на вторую часть, и квадратЪ второй части взятой трижды и умноженной на первую часть.

ЗАДАЧА XVII.

§. 79. Извлечь алгебраическимЪ образомЪ кубической радиксЪ изЪ даннаго куба.

РѢ-

РѢШЕНІЕ.

1. Кубъ первой части, на пр. a^3 отнявъ отъ четырехъ членовъ, радиксъ его поставь на мѣстѣ частнаго числа.

2. Найденнаго частнаго числа взявъ квадратъ трижды и поставивъ оной вмѣсто дѣлителя, умножь на вторую часть радикса на пр. на b.

3. Произшедшее изъ того произведеніе отними отъ трехъ членовъ.

4. Квадратъ второй части радикса взявъ трижды умножь на первую часть радикса, и произведеніе изъ того отними отъ двухъ членовъ.

5. Наконецъ взявъ кубъ второй части, отними оной отъ послѣдняго члена, и произойдетъ желаемой радиксъ. На пр.

$$a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3 \mid a + b$$

$$a^3$$

$$3a^2 \mid 3a^2b + 3b^2a + b^3$$

$$3a^2b + 3b^2a + b^3$$

$$0$$

ПРИМѢЧАНІЕ.

§. 80. Равнымъ образомъ должно поступать, когда кубъ будетъ составленъ изъ радикса, состоящаго изъ трехъ, че-

ты-

тырехЪ и болѢе частей; только что притомЪ надлежитЪ наблюдать, что двѢ, три и проч. найденныя части радикса принимаются при извлеченiи за одну, какЪ то яснѢе можно видѢть изЪ слѢдующаго примѢра:

$$a + b + c$$
$$a + b + c$$
$$ac + bc + c^2$$
$$ab + b^2 + bc$$
$$a^2 + ab + ac$$
$$a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$$
$$a + b + c$$
$$a^2c + 2abc + b^2c + 2ac^2 + 2bc^2 + c^3$$
$$a^2b + 2ab^2 + b^3 + 2abc + 2b^2c + bc^2$$
$$a^3 + 2a^2b + ab^2 + 2a^2c + 2abc + ac^2$$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3 \mid a + b + c$$
$$a^3$$

$$3a^2 \mid 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$\mid 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$3a^2 + 6ab + 3b^2 \mid 3a^2c + 6abc + 3b^2c$$
$$\mid 3a^2c + 6abc + 3b^2c$$

$$3ac^2 + 3bc^2 + c^3$$
$$3ac^2 + 3bc^2 + c^3$$
$$0$$

ЗАДАЧА XVIII.

§. 81. Найти свойство биквадрата, то есть, возвысить количество въ четвертую степень алгебраическимъ образомъ.

РѢШЕНІЕ

1. Возьми двучастной радиксъ, то есть, состоящій изъ двухъ членовъ, на пр. $a+b$.

2. Оной умножь самъ на себя, то произойдетъ квадратъ.

3. Квадратъ умножь на свой радиксъ, и произойдетъ кубъ, или третья степень (§. 51.).

4. Наконецъ кубъ умножь еще на свой радиксъ, и произойдетъ биквадратъ, или четвертая степень (§. 51.). На пр.

$$\begin{array}{l}
a+b \\
a+b \\
\hline
ab+b^2 \\
a^2+ab \\
\hline
a^2+2ab+b^2 \text{ квадратъ} \\
a+b \\
\hline
a^2b+2ab^2+b^3 \\
a^3+2a^2b+ab^2 \\
\hline
a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \text{ кубъ} \\
a+b \\
\hline
a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4 \\
a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3 \\
a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \text{ биквадратъ.}
\end{array}$$

ПРИ-

ПРИМѢЧАНІЕ

§. 82. Изъ самаго дѣйствія и составленія биквадрата явствуетъ, что оной заключаетъ въ себѣ биквадратъ первой части и биквадратъ второй части, также кубъ первой части, взятой четырежды и умноженной на вторую часть, и кубъ второй части, взятой четырежды и умноженной на первую часть, и сверьхъ того квадратъ первой, или второй части, взятой шесть разъ и умноженной или на вторую, или на первую часть.

ЗАДАЧА XIX.

§. 83. Извлечь алгебраическимъ образомъ биквадратной радиксъ изъ даннаго биквадрата, или изъ количества возвышеннаго въ четвертую степень.

РѢШЕНІЕ

Когда знаешь, изъ сколькихъ и какихъ точно частей состоитъ биквадратъ; то не трудно будетъ и вынуть изъ онаго то, что оно въ себѣ заключаетъ. На пр.

$$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4b^3a + b^4 \mid a + b$$

$$\underline{a^4}$$

$$4a^3 \mid 4a^3b + 6a^2b^2 + 4b^3a + b^4$$

$$\underline{4a^3b + 6a^2b^2 + 4b^3a + b^4}$$

$$0$$

ЗАДАЧА XX.

§. 84. Показать способъ премѣненія, или преложенія нѣсколькихъ количествъ.

РѢШЕНІЕ

Сперьва возьми двѣ буквы, потомъ три, четыре, или больше, и отвѣдывай, сколько разъ оныя могутъ преложены быть, и узнаешь, что число преложенія количествъ, означенныхъ буквами, есть не что иное, какъ произведеніе всѣхъ единицъ, изъ коихъ оное количество состоитъ. На пр.

Вмѣсто a b можно поставить b a, и потому двѣ буквы могутъ преложены быть только дважды, потому что $1 . 2 = 2$.

Вмѣсто a b c можно поставить: b c a, b a c, c a b, c b a, a c b, a b c, то есть, три буквы могутъ преложены быть шесть разъ, потому что $1 . 2 . 3 = 6$.

Вмѣсто a b c d можно поставить:
a b c d, b c d a, c d a b, d a b c, d c b a, c b a d,
b a d c, a d c b, a d b c, b c a d, a c b d, b d a c,
c d b a, b d c a, c a b d, d b c a, a c d b, d b a c,
c a d b, c b d a, d c a b, a b d c, b a c d, d a c b.

То есть, четыре буквы могутъ преложены быть двацать четыре раза, потому что $1 . 2 . 3 . 4 = 24$. И такъ далѣе.

буквы	число преложен.
5	120
6	720
7	5040
8	40320
9	362880
10	3628800 и проч.

ГЛАВА ШЕСТАЯ.

О

Изобрѣтеніи и приведеніи сравненій.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XVII.

§. 85.

Сравненіе (aequatio) есть сношеніе между собою двухъ равныхъ количествъ.

ЗАДАЧА XXI.

§. 86. Привести данную задачу въ сравненіе.

РѢШЕНІЕ

1. При всякой задачѣ должно принимать въ разсужденіе три обстоятельства, и оныя весьма различать между собою: 1) *количества извѣстныя*, или *данныя*; 2) *количества неизвѣстныя* и 3) *взаимное отношеніе между извѣстными и неизвѣстными количествами.*

2. Для удобнѣйшаго различенія извѣстныхъ количествъ отъ неизвѣстныхъ,

извѣстныя количества первыми азбучными буквами, на пр. a, b, c и проч. а неизвѣстныя послѣдними, на пр. x, y, z означаются.

3. Иногда извѣстное, или неизвѣстное количество означается начальною буквою того имени, какимъ оно называется, на пр. *Сумма* (summa) чрезъ s, а *разность* (differentia) чрезъ d.

4. Когда неизвѣстныя количества сравниваются съ извѣстными такимъ образомъ, что означивъ одно изъ нихъ, прочія чрезъ сравненіе съ извѣстными познаются; то въ такомъ случаѣ довольно бываетъ и одной буквы для означенія неизвѣстныхъ количествъ. На пр. ежели разность неизвѣстныхъ количествъ дана; то она будучи приложена къ ме́ньшему количеству производитъ бо́льшее.

5. По означеніи извѣстныхъ и неизвѣстныхъ количествъ, надлежитъ разсуждать о томъ, какое оныя имѣютъ взаимное между собою отношеніе, чтобъ изъ сравненія ихъ можно было произвести два равныя количества; ибо сіи, зна́комъ равенства между ими поставленнымъ будучи соединены, составятъ сравненіе.

6. Стараться притомъ надлежитъ, чтобъ въ сравненіи всѣ количества извѣстныя и неизвѣстныя были соединены.

7 НаконецЪ, когда будетЪ много неизвѢстныхЪ количествЪ, означенныхЪ особливыми буквами; вЪ такомЪ случаѢ должно составлять столько сравненiй, сколько находится неизвѢстныхЪ количествЪ. На пр.

Дана сумма и разность двухЪ количествЪ, требуется найти самыя тѢ количества.

ПоложимЪ, что сумма тѢхЪ количествЪ $= a$, разность оныхЪ $= d$, бо́льшее количество $= y$, ме́ньшее $= x$; то здѢсь можно вывести двоякое количествЪ отношенiе, то есть, вЪ разсужденiи суммы и вЪ разсужденiи разности ихЪ, потому что два неизвѢстныя количества, вмѢстѢ взятыя, суть равны суммѢ; слѢдовательно

$$a = y + x$$

Когдажь ме́ньшее количество вычтешь изЪ бо́льшаго; то остатокЪ будетЪ равенЪ разности; и потому

$$d = y - x$$

УдобнѢежь здѢлаешь наименованiе количествЪ, когда вмѢсто бо́льшаго количества приложишь кЪ ме́ньшему разность; ибо извѢстно, что ме́ньшее количество, будучи сложено сЪ разностью, составляетЪ бо́льшее (§. 54. Ариѳ.); почему

$$a = x + d + x$$

или $a = 2x + d$

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XVIII.

§. 87. *Членами сравненія* (membra aequationis) называются самыя количества, соединенныя между собою знакомъ равенства. На пр. a есть первой членъ, $2x + d$, второй членъ сравненія.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XIX.

§. 88. Сравненіе, по числу измѣреній неизвѣстнаго количества, есть, или *простое* (simplex), когда неизвѣстное количество будетъ первая степень, или радиксъ; или *квадратическое* (quadratica), или *кубическое* (cubica), когда неизвѣстное количество будетъ вторая, или третья степень, и такъ далѣе. На пр.

$a = 2x + d$ простое сравненіе

$a^2 + b^2 = x^2$ квадратическое.

$a^3 - b^3 = x^3$ кубическое

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XX.

§. 89. *Сравненіе квадратическое неполное* (aequatio quadratica affecta, seu imperfecta) есть, когда въономъ не достаетъ квадрата извѣстнаго количества. На. пр. $x^2 + 2ax = b^2$, видно, что здѣсь недостаетъ a^2, по приложеніи котораго съ обѣихъ сторонъ сравненія, произойдетъ полное, или совершенное сравненіе. На пр. $x^2 + 2ax + a^2 = b^2 + a^2$.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XXI.

§. 90. *Приведеніе сравненій* (reductio aequationum) есть способъ, помощію котораго

го отдѣляется неизвѣстное количество отъ извѣстныхъ, и содержанïе онаго къ симъ означается знакомъ равенства.

ЗАДАЧА XXII.

§. 91. Сдѣлать приведенïе сравненïй.

РѢШЕНIЕ.

1. Извѣстно изъ свойства равныхъ количествъ, о которыхъ въ Ариѳметикѣ упомянуто было, что чрезъ сложенïе равныхъ съ равными и вычитанïе равныхъ изъ равныхъ, или чрезъ умноженïе и дѣленïе оныхъ на равныя, или чрезъ извлеченïе подобныхъ радиксовъ, или произведенïе подобныхъ степеней, равенство такихъ количествъ не уничтожается; то, чтобъ неизвѣстныя количества, съ извѣстными перемѣшанныя, отъ извѣстныхъ отдѣлены быть могли, надлежитъ сложенныя количества вычитать, вычтенныя складывать, умноженныя дѣлить, раздѣленныя умножать, изъ степеней извлекать радиксы, или, когда надобно будетъ, радиксы приводить въ степени; такимъ образомъ наконецъ произойдутъ два члена сравненïя, изъ коихъ одинъ членъ неизвѣстныя, а другой извѣстныя количества изображать будетъ. На пр.

$$x - 4 = 16$$
$$x = 16 + 4 \text{ слож.}$$

$$x + 4 = 24$$
$$x = 24 - 4 \text{ вычтен.}$$

$$\frac{x}{3} = 6$$
$$x = 18 \text{ умнож.}$$

$$3x = 12$$
$$x = 4 \text{ раздѣл.}$$

$$x^2 = 16$$
$$x = \sqrt{16} = 4 \text{ извлеч. радиксѣ.}$$

2. Когда вѣ задачѣ случатся два неизнѣстныя количества, и оная потому приведена вѣ два сравненія; то вѣ такомѣ случаѣ сперьва надлежитѣ сыскать содержаніе одного неизвѣстнаго количества, и оное вѣ другомѣ сравненіи, вѣ которомѣ содержится то неизвѣстное количество, на мѣсто сего поставить, чтобѣ имѣть новое сравненіе, вѣ которомѣ другое неизвѣстное количество уничтожено. Ибо, какѣ напослѣдокѣ сіе неизвѣстное количество неизвѣстнымѣ уравнено будетѣ, поелику отношеніе его кѣ другому неизвѣстному количеству изѣ перваго сравненія видно, и другое неизвѣстное количество найдено быть можетѣ. На пр.

a =

$a = x + y \qquad d = y - x$

$a - x = y \qquad d + x = y$

$a - x = d + x$ рав. вмѣсто рав. постав.

$a = d + 2x$

$a - d = 2x$

$$\frac{a - d}{2} = x$$

Слѣдовательно сыскавъ x, будетъ извѣстно и y.

ПРИБАВЛЕНІЕ

§. 92. Изъ найденнаго сравненія $\frac{a - d}{2} = x$ явствуетъ, что, ежели изъ суммы двухъ количествъ вычтешь разность ихъ и остатокъ раздѣлишь на 2, частное число будетъ ме́ньшее количество; естьлижъ къ суммѣ двухъ количествъ приложивъ разность ихъ, сумму раздѣлишь на 2; то частное будетъ бо́льшее количество. На пр.

Положимъ, что $a = 30$, $b = 8$; то будетъ $(a - b) : 2 = (30 - 8) : 2 = 11$, $(a + b) : 2 = (30 + 8) : 2 = 19$.

ЗАДАЧА XXIII.

§. 93. Рѣшить неполное квадратическое сравненіе.

РѢШЕНІЕ.

Положимъ, что дано неполное квадратическое сравненіе $x^2 + ax = b^2$; то, коли-

личество x принявъ за одну часть двучастнаго радикса, будетъ извѣстно количество второй части онаго, то есть, вторая часть радикса дважды взятая, на пр. $\frac{1}{2}a$. И какъ до полнаго квадрата недостаетъ только квадрата сей части, то есть, $\frac{1}{4}a^2$; то приложивъ оной съ обѣихъ сторонъ сравненія, произойдетъ полное квадратическое сравненіе. На пр.

$$x^2 + ax = b^2$$

$$\frac{1}{4}a^2 \quad \frac{1}{4}a^2$$

$$x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 = b^2 + \frac{1}{4}a^2$$

$$x + \frac{1}{2}a = \sqrt{b^2 + \frac{1}{4}a^2}$$

$$x = \sqrt{(b^2 + \frac{1}{4}a^2)} - \frac{1}{2}a$$

ГЛАВА СЕДЬМАЯ.

О
Алгебраическомъ рѣшеніи нѣкоторыхъ задачъ вообще.

ЗАДАЧА XXIII.

§. 94.

Дана сумма и разность двухъ количествъ; найти самыя тѣ количества.

РѢШЕНІЕ.

Положимъ, что сумма $a = 48$, разность $d = 12$, меньшее количество x, большее

шее, или ме́ньшее сложенное съ разностью $x + d = x + 12$; то будетъ

$$2x + d = a \qquad 2x + 12 = 48$$
$$2x = a - d \qquad 2x = 48 - 12$$
$$x = \frac{a - d}{2} \qquad 2x = 36$$
$$x = \frac{36}{2} = 18 \text{ ме́ньшее количество.}$$

Слѣдовательно бо́льшее количество $= x + d = 18 + 12 = 30$.

Или

Положивъ, что сумма $= a$, разность $= d$, ме́ньшее количество $= x$, бо́льшее $= y$; то будетъ

$$a = x + y \qquad d = y - x$$
$$a - x = y \qquad d + x = y$$

По чему $a - x = d + x$ (§. 32. Ариѳ.)

$$a = d + x + x$$
$$a = d + 2x$$
$$a - d = 2x$$
$$\frac{a - d}{2} = x$$

ПРИБАВЛЕНІЕ

§. 95. Изъ произшедшаго сравненія $\frac{a - d}{2} = x$ выводится слѣдующее пра́вило: ежели изъ суммы двухъ данныхъ количествъ вычтешь ихъ разность и остатокъ раздѣлишь

лишь на 2; то изъ того происходитъ ме́ньшее количество. На пр. $a = 48$, $d = 12$; то будетъ.

$$\begin{array}{r} 48 \\ 12 \\ \hline 2|36| \end{array}$$ 18 ме́ньшее количество.

ЗАДАЧА XXIV.

§. 96. Найти два количества, коихъ извѣстно содержаніе и разность.

РѢШЕНІЕ

Положимъ, что разность количествъ $b = 45$, знаменитель содержанія оныхъ $e = 6$, ме́ньшее количество x, бо́льшее количество $ex = 6x$; то будетъ.

$$ex - x = b \quad 6x - x = 5x = 45$$

$$ex - 1 = b \quad x = \frac{45}{5} = 9. \text{ мень. кол.}$$

$$x = \frac{b}{e-1}$$

ПРИБАВЛЕНІЕ

§. 97. Изъ произшедшаго сравненія $x = \frac{b}{e-1}$ выводится слѣдующее пра́вило: ежели разность двухъ количествъ раздѣлится на знаменателя содержанія безъ единицы; то частное число будетъ ме́ньшее количество. На пр.

$6 - 1 = 5 \,|\, 45 \,|\,$ 9 ме́ньшее количество.

ЗАДАЧА XXV.

§. 98. Дана сумма двухЪ которыхЪ нибудь чиселЪ изЪ трехЪ; найти оныя числа.

РѢШЕНІЕ.

ПоложимЪ, что искомыя числа будутЪ x, y, z, сумма перваго и втораго $a = 40$, сумма втораго и третьяго $b = 28$, сумма перваго и третьяго $c = 36$; то будетЪ

$x + y = a \qquad y + z = b \qquad x + z = c$

$x = a - y \qquad z = b - y \qquad x = c - x$

$a - y = c - z$ (§. 32. Ариѳ.)

$a - y = c - b + y$ (§. 31. Ариѳ.)

$a = c - b + 2y$

$a - c + b = 2y$

$$\frac{a - c + b}{2} = y$$

То есть, $y = 40 - 36 = 4 + 28 = 32 : 2 = 16$; $x = 40 - 16 = 24$; $z = 28 - 16 = 12$.

ЗАДАЧА XXVI.

§. 99. Дана сумма двухЪ количествЪ и разность ихЪ квадратовЪ; найти самыя количества.

РѢШЕНІЕ.

ПоложимЪ, что сумма оныхЪ $2a$, разность квадратовЪ ихЪ b, разность количествЪ $2x$; то будетЪ бо́льшее количество $a + x$, ме́ньшее $a - x$ (§. 80. Тригоном.). Почему

$$\begin{array}{l} a^2 + 2ax + x^2 \\ a^2 - 2ax + x^2 \\ \hline 4ax = b \end{array} \text{ вычтено.}$$

$$x = \frac{b}{4a}$$

Изъ произшедшаго сравненія $x = \frac{b}{4a}$ выводится слѣдующее правило: ежели разность квадратовъ раздѣлится на сумму количествъ, вдвое взятую; то частное число будетъ половина разности тѣхъ количествъ; а когда половинная разность извѣстна, то къ половинѣ суммы тѣхъ количествъ приложивъ оную, получишь бо́льшее количество; когдажъ оную изъ половины суммы тѣхъ же количествъ вычтешь; то получишь ме́ньшее количество (§. 80. Тригоном.).

ЗАДАЧА XXVII.

§. 100. Найти такое число, котораго половина съ третьею и четвертою долею превышаетъ то число единицею.

РѢШЕНІЕ.

Положимъ, что искомое число $= x$; то по содержанію задачи будетъ

$$\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{4}x = x + 1$$

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = x + 1$$

$$\frac{12x}{24} + \frac{8x}{24} + \frac{6x}{24} = x + 1$$
$$\frac{26x}{24} + = x + 1$$
$$26x = 24x + 24$$
$$26x - 24x = 24$$
$$2x = 24$$
$x = \frac{24}{2} = 12$. Искомое число.

Повѣрка

$$\begin{array}{r|r|l} 2 & 12 & 6 \\ 3 & 12 & 4 \\ 4 & 12 & 3 \\ \hline & & 13 = 12 + 1. \end{array}$$

ЗАДАЧА. XXVIII.

§ 101. Найти такое число, котораго бы $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{5}$ вмѣстѣ съ 6 составляли 100.

РѢШЕНІЕ.

Положивъ, что неизвѣстное число $= x$; то, въ силу содержанія задачи, будетъ

$$\begin{array}{l|l} & 60 \\ \frac{x}{3} & 20x \\ \frac{x}{4} & 15x \\ \frac{x}{5} & 12x \end{array}$$
$$\frac{47x}{60} + 6 = 100$$
$$47x + 360 = 6000$$
$$47x = 6000 - 360$$
$$47x = 5640$$
$$x = \frac{5640}{47}$$

$47 | 5640 |$ 120. Неизвѣстное число

 Повѣрка

ПовѢрка

3	120	40
4	120	35
5	120	24
		94
		6
		100

ЗАДАЧА XXIX.

§ Найти такое число, изъ котораго когда вычтешъ $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ и притомъ 3; то бы оставалось ничего.

РѢШЕНІЕ.

Положивъ, что неизвѢстное число $= x$; то, въ силу содержанія задачи, будетъ

$$\begin{array}{c|c} & 12 \\ \frac{x}{3} & 4x \\ \frac{x}{4} & 3x \\ \frac{x}{6} & 2x \\ \hline & \frac{9x}{12} \end{array}$$

$$x - \frac{9x}{12} \text{ вычтено}$$

$$\frac{3x}{12} - 3 = 0$$

$$3x - 36 = 0$$

$$3x = 36$$

$$x = \frac{36}{3}$$

3|36|12. НеизвѢстное число

Или

$$x - \frac{x}{3} - \frac{x}{4} - \frac{x}{6} - 3 = 0$$

$$x - \frac{x}{3} - \frac{x}{4} - \frac{x}{6} = 3$$

$$\frac{x - 24x - 18x - 12x}{72} = 3$$

$$72x - 24x - 18x - 12x = 216$$

$$18x = 216$$

$$x = \frac{216}{18} \,|\, 216 \,|\, 12.$$

Повѣрка

3 | 12 | 4
4 | 12 | 3
9 | 12 | 2
9
3
12 — 12 = 0.

ЗАДАЧА XXX.

§. 103. Найти три такія числа, изъ которыхъ бы первое равно было второму безъ 16, второежъ равно третьему безъ 2, а всѣ вмѣстѣ составляли сумму 94.

РѢШЕНІЕ.

Положивъ, что первое число = x, второе = y, третье = z; то, въ силу содержанія задачи, будетъ.

$x = y - 16$

$y = z - 2$

$x + y + z = 94$

$y - 16 + y + z = 94$ (§. 31 Ариѳ.)

$z - 2 - 16 + z - 2 + z = 94$ (§. 31. Ариѳ.)

$3z - 2 - 16 - 2 = 94$

$$3z - 20 = 94$$
$$3 = 114$$
$$z = \frac{114}{3}$$

3 | 114 | 38. Третье неиз. число.

Слѣдовательно $y = 38 - 2 = 36$; $x = 36 - 16 = 20$; ибо $38 + 36 + 20 = 94$.

ЗАДАЧА XXXI.

§. 104. Найти такое число, по сложенiи бы котораго самого съ собою, по умноженiи суммы на тожъ число, по вычтенiи тогожъ числа изъ произведенiя и по раздѣленiи остатка на тоже число, частное число произошло 13.

РѢШЕНIЕ

Положивъ, что неизвѣстное число $= x$; то, въ силу содержанiя задачи, будетъ

$$\begin{array}{l} x \\ x \\ \hline 2x \\ x \\ \hline 2x^2 \end{array}$$

$$\frac{2x^2 - x}{x^2} = 13$$

$$2x^2 - x = 13x$$
$$2x - 1 = 13$$
$$2x = 14$$
$$x = \frac{14}{2}$$

2 | 14 | 7. Неизвѣстное число.

Ибо

Ибо $7 + 7 = 14 \times 7 = 98 - 7 = 91 : 7 = 13$.

ЗАДАЧА XXXII.

§. 105. Дана сумма и произведенiе двухъ количествъ; найти самыя тѣ количества.

РѢШЕНIЕ.

Положивъ, что сумма $= a$, половина разности $= x$; произведенiе $= b$; то будетъ большое количество $= \frac{1}{2}a + x$, меньшое $= \frac{1}{2}a - x$ (§. 80. Тригоном.). И такъ, въ силу содоржанiя задачи, будетъ

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2}a + x \\ \frac{1}{2}a - x \\ \hline -\frac{1}{2}ax - x^2 \\ \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}ax \\ \hline \frac{1}{4}a^2 - x^2 = b \\ \frac{1}{4}a^2 = b + x^2 \\ \frac{1}{4}a^2 - b = x^2 \\ \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b)} = x \end{array}$$

ПРИБАВЛЕНIЕ

§. 106, Изъ произшедшаго сравненiя $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b)} = x$ выводится слѣдующее пра́вило: ежели изъ квадрата половины суммы двухъ количествъ вычтешь произведенiе оныхъ и изъ остатка извлечешь квадратной радиксъ; то оной будетъ половина разности искомыхъ количествъ. На пр. $a = 14$, $b = 48$; то будетъ $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b)} = \sqrt{(49 - 48)} = 1$. И потому

му $\frac{1}{4}$ a † x = 7 † 1 = 8 большое количество; $\frac{1}{2}$ a — x = 7 — 1 = 6 меньшое (§. 80. Тригоном). Ибо 8 × 6 = 48, и 8 † 6 = 14.

ПРИМѢРЫ. ЗАДАЧЪ,

Которыя могутъ рѣшимы быть чрезъ одно сравненіе.

1. Нѣкотораго войска третья часть побита, четвертая часть въ полонъ взята да сверьхъ того 1000 человѣкъ убѣжали. Спр. сколь велико было все то войско?

Положивъ, что все то войско = x, 1000 человѣкъ = a; то будетъ

$$\frac{1}{3} x + \frac{1}{4} x + a = x$$

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + a = x$$

$$\frac{4x}{12} + \frac{3x}{12} + a = x$$

$$\frac{7x}{12} + a = x$$

$$7x + 12a = 12x$$

$$12a = 5x$$

$$\frac{12a}{5} = x$$

То есть, когда a = 1000; то x = 1000 × 12 = 12000 : 5 = 2400. Столько всего войска было. Ибо 2400 : 3 = 800 и 2400 : 4 = 600; по чему 800 † 600 † 1000 = 2400.

2. Нѣкто треть дороги ѣхалъ верьхомъ, пятую долю шелъ пѣшкомъ, что все

все составляетЪ 50 верстЪ. Спр. Сколь велика была вся дорóга?

ПоложивЪ, что вся дорóга = x, 50 = a: то будетЪ

$$\frac{x}{3}\,x + \frac{x}{5} = a$$
$$\frac{5x}{15} + \frac{3x}{15} = a$$
$$\frac{8x}{15} = a$$
$$8x = 15a$$
$$x = \frac{15a}{8}$$

То есть, когда $a = 50$; то $x = 50 \times 15 = 750 : 8 = 93\frac{3}{4}$ вся дорóга. Ибо $31\frac{1}{4} + 18\frac{3}{4} = 50$

3. КЪ находящемуся вЪ нѢкоторомЪ городѢ гварнизону ежели прибавить третью его часть, и сверьхЪ того 100 человѢкЪ; то будетЪ состоять тотЪ гарнизонЪ изЪ 3000 человѢкЪ. Спр. сколько человѢкЪ вЪ томЪ гварнизонѢ прежде находилось?

ПоложивЪ, что весь гварнизонЪ = x, 3000 человѢкЪ = a; то будетЪ

$$x + \frac{x}{3} + 100 = a$$
$$3x + x + 300 = 3a$$
$$4x + 300 = 3a$$
$$4x = 3a - 300$$
$$x = \frac{3a - 300}{4}$$

То есть, когда $a = 3000$; то $x = 3000 \times 3 = 9000 - 300 = 8700 : 4 = 2175$. Изъ столькихъ человѣкъ тотъ гварнизонъ прежде состоялъ. Ибо $2175 : 3 = 725 + 2175 + 100 = 3000$.

4 Александръ Великій старѣе былъ Эфестіона двумя годами, Клитъ превосходилъ обоихъ ихъ четырьмя годами, а всѣмъ имъ вообще было 96 лѣтъ. Спр. по скольку лѣтъ каждому изъ нихъ вообсобливости было?

Положивъ, что Эфестіонъ имѣлъ лѣтъ $= x$; то Александръ Великій будетъ имѣть $x + 2$, Клитъ же $2x + 6$. И по тому

$$x + x + 2 + 2x + 6 = 96$$
$$4x + 8 = 96$$
$$4x = 96 - 8$$
$$x = \frac{88}{4} = 22 \text{ Эфестіоновы годы.}$$

То есть, когда Эфестіонъ имѣлъ отъ роду 22 года; то Александръ Великій имѣлъ 24, Клитъ же 50 лѣтъ; ибо $22 + 24 + 50 = 96$.

5. Отецъ съ Сыномъ имѣли вообще отъ роду 126 лѣтъ, но одинъ другаго былъ моложе 30 годами. Спр. Сколько которому лѣтъ?

Положивъ, что сумма лѣтъ $= a$, разность оныхъ $= b$, возрастъ сына $= x$; то будетъ отцу лѣтъ $= x + b$: и потому

x

$$x + b + x = a \qquad\qquad x + 30 + x = 126$$
$$2x + b = a \qquad\qquad 2x + 30 = 126$$
$$2x = a - b \qquad\qquad 2x = 126 - 30 = 96$$
$$x = \frac{a - b}{2} \qquad\qquad x = \frac{96}{2} = 48 \text{ Столько}$$

лѣтъ имѣлъ сынъ.

То есть, когда сыну 48 лѣтъ; то отцу будетъ 78 лѣтъ; ибо $48 + 30 = 78$, и $126 - 48 = 78$.

6. Число 60 раздѣлить на двѣ части такъ, что бы $\frac{1}{4}$ большой части съ $\frac{1}{5}$ меньшой, вмѣстѣ взятыя, составляли 14. Спр. Какія тѣ части суть?

Положивъ, что меньшая часть $= x$; то будетъ большая часть $= 60 - x$; по чему

$$\frac{x}{5} + \frac{60 - x}{4} = 14$$
$$\frac{4x}{20} + \frac{300 - x}{20} = 14$$
$$\frac{4x + 300 - x}{10} = 14$$
$$4x + 300 - 5x = 280$$
$$300 + 5x - 4x = 280$$
$$300 + x = 280$$
$$x = 300 - 280 = 20. \text{ Меньшая час.}$$

Когдажъ меньшая часть 20; то будетъ большая часть $60 - 20 = 40$.

Ибо $40 : 4 = 10$ и $20 : 5 = 4$. И такъ $10 + 4 = 14$.

7. Одинъ Италіанецъ пришедши въ Венецію издержалъ въ первой день изъ всѣхъ своихъ денегъ, сколько онъ имѣлъ, $\frac{1}{3}$, въ другой день $\frac{1}{4}$, въ третей день $\frac{1}{5}$, такъ что напослѣдокъ осталось у него только 26 руб. Спр. Сколько онъ денегъ принесъ съ собою?

Положивъ, что онъ принесъ денегъ $= x$; то будетъ.

$$x - \frac{x}{3} - \frac{x}{4} - \frac{x}{5} = 26$$

$$x - \frac{47x}{60} = 1560$$

$$13x = 1560$$

$$x = \frac{1560}{13} = 120$$ Столько денегъ принесъ онъ съ собою.

Ибо $120 : 3 = 40$; $120 : 4 = 30$; $120 : 5 = 24$; по чему $40 + 30 + 24 = 94$. И такъ $120 - 94 = 26$.

8. Нѣкто изъ 60 руб. заплатилъ столько долгу, что $\frac{3}{4}$ остальныхъ равняются $\frac{1}{2}$ долговыхъ денегъ. Спр. Сколько у него еще осталось?

По-

Положивъ, что долгу было $= x$; то въ остаткѣ будетъ $60 - x$; почему

$$(60 - x) : \frac{3}{4} = \frac{180 - 3x}{4}$$

$$\frac{180 - 3x}{4} = \frac{x}{2}$$

$$180 - 3x = \frac{4x}{2}$$

$$360 - 6x = 4x$$

$$360 = 10x$$

$x = \frac{360}{10} = 36.$ Столько на немъ долгу было.

Ибо $60 - 36 = 24 : 4 = 6 \times 3 = 18 = 36 : 2 = 18.$

9. Нѣкто нанялъ работника на годъ съ такимъ договоромъ, чтобъ за каждой работной день давать ему по 12 копѣекъ, а за всякой неработной день вычитать у него по 8 копѣекъ. Но по прошествіи года и по расчету хозяинъ съ работникомъ взаимно другъ другу не оказались должными. Спр. Сколько дней показанной работникъ работалъ и сколько дней гулялъ?

Положивъ, что число работныхъ дней $= x$; то число неработныхъ дней будетъ $= 365 - x$; почему

$1 : 12\ x : 12x$

$1 : 8 = 365 - x : 2920 - 8x$

2920

$2920 - 8x = 12x$

$2920 = 20x$

$x = \frac{2920}{20} = 146$ Столько дней работалъ.

И такъ 365—146=219 столько дней гулялъ.

10. Три человѣка должны раздѣлить между собою 400 рублей такимъ образомъ: первой долженъ взять меньше другаго 12 руб. третей больше другагожъ 16 рубл. Спр. сколько которому достанется изъ той суммы.

Положивъ, что второй возметъ изъ той суммы денегъ $= y$; то первой возметъ $= y + 16$; и такъ

$(y - 12) + y + (y + 16) = 400$

$3y - 12 + 16 = 400$

$3y + 4 = 400$

$3y = 396$

$y = \frac{396}{2} = 132$. Столько второй получитъ изъ той суммы.

И такъ первой возметъ изъ той суммы 132 — 12 = 120(, а третей 132 † 16 = 148. Ибо 132 † 120 † 148 = 400.

11. Нѣкоторое число умножено на 2, къ произведенію приложено 60, сумма раздѣлена на 11, изъ частнаго числа вычтено 15, остатокъ умноженъ на $2\frac{2}{9}$, вышло 100. Спр. сколь велико было то число?

По-

Положивъ, что неизвѣстное число $= x$; то будетъ

$$\left(\frac{2x + 6}{11} - 15\right) \times 2\tfrac{2}{9} = 100$$

$$\frac{40x + 1200}{99} - \frac{300}{9} = 100$$

$$\frac{360 + 10800}{891} - \frac{29700}{891} = 100$$

$$360x + 10800 - 29790 = 89100$$

$$360x + 10800 = 118800$$

$$360x = 108000$$

$$x = \frac{108000}{360} = 300$$ Искомое число.

Ибо $300 \times 2 = 600 + 60 = 660 : 11 = 60 - 15 = 45 : 2\tfrac{2}{9} = 100$.

12. Сидоръ да Карпъ стали играть въ карты, имѣя по равному числу денегъ. Но какъ Сидоръ проигралъ 12 руб. а Карпъ 57 руб. то, по окончанiи игры, у Сидора осталось денегъ вчетверо больше, нежели у Карпа. Спр. по скольку денегъ каждой изъ нихъ имѣлъ?

Положивъ, что каждой изъ нихъ имѣлъ денегъ x; = то будетъ.

$$x - 57$$

$$4$$

$$x - 12 = 4x - 228$$

$$x = 4x - 216$$

$$0 = 3x - 216$$
$$3x = 216$$
$$x = \frac{216}{3} = 72.$$ По стольку денегъ каждой изъ нихъ имѢлъ.

Ибо $72 - 12 = 60$, и $72 - 57 = 15 \times 4 = 60$.

13. Ежели неизвѢстнаго числа людей каждому изъ неизвѢстной суммы дать по 3 руб. то не достанетъ денегъ на 3 человѢка; а когда каждому дать по 2 руб. тогда останется денегъ на 4 человѢка. Спр. сколько было людей?

Положивъ, что число людей было $= x$; то будетъ.

$$\begin{array}{cccc} x & 3 & x & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ \hline \end{array}$$
$$3x - 9 = 2x + 8$$
$$3x - 2x - 9 = 8$$
$$x - 9 = 8$$
$$x = 17.$$ Число людей.

Ибо $17 \times 3 = 51 - 9 = 42$, и $17 \times 2 = 34 + 8 = 42$.

14. Изъ двухъ артелей работныхъ людей одной дано 135 руб. а другая, которая была меньше первой 2 человѢками, получила 60 руб. притомъ сколько изъ первой артели получили двое, столько изъ второй взяли трое.

трое. Спр. Сколько людей въ первой и другой артели находилось?

Положивъ, что въ первой артели находилось людей x; то второй во будетъ x — 2; почему.

$$x : 135 = 1 : \frac{135}{x} \times 2 = \frac{270}{x}$$ (§ 173. Ариѳ)

$$x - 2 : 60 = 1 : \frac{60}{x-2} \times 3 = \frac{180}{x-2}$$ (§. 173. Ариѳ)

И такъ $\frac{270}{x} = \frac{180}{x-2}$ (§. 31. Ариѳ.)

$$270x - 540 = 180x$$

$$270x = 180x + 540$$

$$270x - 180x = 540$$

$$90x = 540$$

$x = 540 : 90 = 6$. Столько людей находилось въ первой артели.

Слѣдовательно во второй артели было людей $6 - 2 = 4$. Ибо $6 : 235 = 1 : \frac{135}{6} \times 2 = \frac{270}{6} = 45$, и $4 : 60 = 1 : \frac{60}{4} \times 3 = \frac{180}{4} = 45$.

15. Нѣкто оставшимся послѣ себя девятерымъ дѣтямъ завѣщалъ раздѣлить имѣнiе свое, состоящее въ 17000 руб. такъ, чтобъ каждой сынъ взялъ по

по 2000 руб. а каждая дочь по 1800 руб. Спр. Сколько послѣ того человѣка осталось сыновей и дочерей?

Положивъ, что послѣ того человѣка осталось сыновей $= x$; то будетъ дочерей $9 - x$; и потому.

$1 : 2000 = x : 2000x$ (§. 117 и 173. Ариѳ.)

$1 : 1800 = 9 - x : 16200 - 1800x$ (§. 117 и 173 Ариѳ.)

$2000x + 16200 - 1800x = 17000$ (§. 34. Ариѳ.)

$2000x - 1800x = 800$

$200x = 800$

$x = 800 : 200 = 4$. Столько сыновей осталось.

Слѣдовательно было дочерей 5. Ибо $2000 \times 4 = 8000$, и $8000 \times 5 = 9000$. И такъ $8000 + 9000 = 17000$.

16. Изъ троихъ одинъ положивъ въ складку больше противъ другаго 35 рублями, а прочіе двое вмѣстѣ 84 руб. приторговали 66 руб. изъ котораго барыша третей получилъ 21 руб. Спр. по скольку руб. положили въ складку?

Положивъ, что второй положилъ въ складку x; то первой положилъ $x + 35$, а третей $84 - x$; и потому

x
$x + 35$
$84 - x$
$119 + x$ Складка всѣхъ троихъ.

Итакъ $119 + x : 66 = 84 - x : 21$ (§. 117 Ариѳ.).

$2499 + 21x = 5544 - 66x$ (§. 136. Ариѳ.).

$$2499 = 5534 - 87x$$
$$5544 - 2499 = 87x$$
$$3045 = 87x$$
$$87x = 3045$$
$$x = \frac{3045}{87} = 35$$ Столько положилъ въ складку второй.

Слѣдовательно положилъ первой $35 + 35 = 70$; а третей $84 - 35 = 49$. Ибо $35 + 49 = 84$.

17. Клавдій жилъ вдвое больше Карла, и сверьхъ того 4 года; Павелъ жилъ столько лѣтъ, сколько они оба вмѣстѣ и сверьхъ того 6 лѣтъ; всѣ же они вмѣстѣ жили 60 лѣтъ. Спр. сколько которой изъ нихъ жилъ?

Положивъ, что Карлъ жилъ лѣтъ x; то будутъ Клавдіевы годы $2x + 4$, а Павловы годы $3x + 10$. И потому.

$$x$$
$$2x + 4$$
$$\underline{3x + 10}$$
$$6x + 14 = 60 \text{ (§. 34. Ариѳ.).}$$
$$6x = 46$$
$$x = \frac{46}{6} = 7\tfrac{2}{3} \text{ Карловы годы.}$$

Слѣдовательно $7\tfrac{2}{3} \times 2 = 15\tfrac{1}{3} + 4 = 19\tfrac{1}{3}$ Клавдіевы годы; $7\tfrac{2}{3} + 19\tfrac{1}{3} + 6 = 33$ Павловы годы. Ибо $7\tfrac{2}{3} + 19\tfrac{1}{3} + 33 = 60$.

18. Изъ четырехъ пушекъ выстрѣлено было нѣсколько зарядовъ: изъ первой выстрѣлено $\tfrac{1}{3}$ изъ всего числа зарядовъ; изъ другой $\tfrac{1}{2}$ того числа зарядовъ, сколько выстрелѣно было изъ первой; изъ третьей выстрелѣно $\tfrac{1}{2}$ того числа зарядовъ, сколько выстрелѣно было изъ второй; и наконецъ для четвертой пушки осталось токмо 39 зарядовъ. Спр. Сколько всѣхъ зарядовъ выстрелѣно было изъ всѣхъ пушекъ?

Положивъ, что всѣхъ было зарядовъ x; то будетъ

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{12} + \frac{x}{25} = \frac{396x}{864}$$

$$x - \frac{396x}{864} = 39$$

$$864x - 396x = 33606$$

$468x = 33606$

$x = \frac{33606}{468} = 72$ Столько всѣхъ зарядовъ было,

Слѣдовательно изъ первой пушки выстрѣлено зарядовъ $72 : 3 = 24$; изъ второй $24 : 4 = 6$; изъ третей $6 : 2 = 3$. Ибо $24 + 6 + 3 = 33$. И потому $72 - 33 = 39$.

ПРИМѢРЫ ЗАДАЧЪ,

котарыя могутъ рѣшены быть чрезъ два, или многія сравненія.

1. Нѣкоторое войско состоитъ изъ Ишпанцовъ, Нидерландцовъ и Нѣмцовъ: въ томъ числѣ находится Нѣмцовъ 10000 человѣкъ, Нидерландцы составляютъ третью часть Нѣмцовъ и Ишпанцовъ вмѣстѣ, а Ишпанцы составляютъ половину Нѣмцовъ и Нидерландцовъ вмѣстѣ. Спр. сколько находилось въ томъ войскѣ Нидерландцовъ и Ишпанцовъ?

Положивъ, что Нидерландцовъ было y, а Ишпанцовъ x; то будетъ

$y = \frac{10000 + x}{3}$ $x = \frac{10000 + y}{2}$.

$3y = 10000 + x$

$3y = 10000 + \frac{10000 + y}{2}$

$6y = 20000 + 10000 + y$

$5y = 20000 + 10000$

$5y = 30000$

$y = 30000 : 5 = 6000$. Столько Нидерландцовъ было.

Слѣдовательно $6000 + 10000 : 2 = 8000$. Столько было Ишпанцовъ. Ибо $10000 + 8000 = 18000 : 3 = 6000$, и $10000 + 6000 = 16000 : 2 = 8000$.

2. Ежели изъ Цесарскаго войска убѣгутъ 900 человѣкъ въ Прусское; то будутъ войска съ обѣхъ сторонъ равныя; естьлижъ изъ Прусскаго убѣжитъ толикоежъ число въ Цесарское; то Цесарское войско будетъ вдесятеро больше оставшагося Прусскаго. Спр. по скольку человѣкъ находилось въ обоихъ войскахъ?

Положивъ, что Цесарцовъ было x, Прусаковъ y; то будетъ

$y + 900 = x - 900$

$y = x + 1800$. Прусское войско.

Слѣдовательно, когда изъ онаго убѣгутъ 900 человѣкъ; останется $y = x - 1800 - 900$; и потому Цесарское войско, получивъ 900 человѣкъ бѣглыхъ въ прибавку, сдѣлается вдесятеро больше оставшагося Прусскаго войска. И такъ

x

$x + 900 = 10x - 18000 - 9000$
$x = 10x - (18000 - 9000 - 900)$
$x = 10x - 27900$
$x + 27900 = 10x$
$27900 = 9x$
$9x = 27900$
$x = 27900 : 9 = 3100$. Столько было Цесарцовъ.

Слѣдовательно $3100 - 1800 = 1300$. Столько было Прусаковъ. Ибо $3100 - 900 = 2200 = 1300 + 900 = 2200$.

3. Нѣсколько человѣкъ желаютъ составить нѣкоторую сумму, для составленія которой ежели каждой изъ нихъ положитъ по 1. руб. то будетъ не доставать 10 руб. а ежели каждой положитъ по 2 руб. то будетъ лишку 10. руб. Спр. сколь велика та складываемая сумма и сколько человѣкъ складываютъ оную.

Положивъ, что складываетъ оную число людей x, а составляемая сумма y; то будетъ

$x . 1 = y - 10$ $\quad$ $x . 2 = y + 10$
$1x = y - 10$ $\quad$ $2x = y + 10$
$x = \frac{y - 10}{1}$ $\quad$ $x = \frac{y + 10}{2}$

$\frac{y - 10}{1} = \frac{y + 10}{2}$ (§. 32. Ариѳ.)

$$2y - 20 = y + 10$$
$$2y = y + 30$$

$y = 30$. Столь велика была складываемая сумма.

Слѣдовательно $30 - 10 = 20$. Столь велико было число складывающихъ ту сумму людей.

Ибо $20 \times 1 = 20$, то есть, точно не достаетъ противъ суммы 10 руб. и $20 \times 2 = 40$, то есть, точно выходитъ лишку 10. руб. противъ суммы.

4. Нѣкто въ двухъ мѣшкахъ имѣлъ по стольку денегъ, что ежели изъ перваго мѣшка переложитъ въ другой 15. руб. то въ обоихъ мѣшкахъ сдѣлается поравну; а когда изъ втораго мѣшка переложитъ въ первой толикоежъ число денегъ; то въ ономъ будетъ находиться вдвое больше, нежели во второмъ. Спр. по скольку денегъ находилось въ тѣхъ мѣшкахъ?

Положивъ, что въ первомъ мѣшкѣ находилось денегъ x, во второмъ y; то будетъ

$x - 15 = y + 15 \qquad y - 15 = \frac{x + 15}{2}$

$x - 30 = y \qquad 2y - 30 = x + 15$

$2x - 60 - 30 = x + 15$

(§. 31. Ариѳ.)

$2x - 90 = x + 15$

2x

$$2x - 105 = x$$
$$2x - x = 105$$
$$x = 105$$ Столько денегъ находилось въ первомъ мѣшкѣ.

Слѣдовательно во второмъ мѣшкѣ было денегъ $105 - 30 = 75$. Ибо $105 - 15 = 90$; и $75 + 15 = 90$; также $75 - 15 = 60$, и $105 + 15 = 120 : 3 = 60$.

5. Молодой оселъ и ослица несли наполненные виномъ мѣхи: ослица неся мѣхъ, для престарѣлыхъ своихъ лѣтъ, такъ устала, что съ мѣста сойти не могла; видя то молодой оселъ, сказалъ ей: что ты такъ устала, неся меньшій мѣхъ противъ моего. Ибо естьли я изъ своего мѣха перелью одно ведро въ твой мѣхъ; то у обоихъ насъ въ мѣхахъ сдѣлается поравну. Но я того сдѣлать не хочу; ты въ мой мѣхъ изъ своего перелей одно ведро, то у меня будетъ вдвое больше твоего. Спр. по скольку ведеръ вина въ мѣхахъ у осла и ослицы находилось?

$x - 1 = y + 1 \quad y - 1 = \frac{x + 1}{2}$

$x - 1 - 1 = y \quad 2y - 2 = x + 1$

$x - 2 = y \quad 2x - 4 - 2 = x + 1$

$2x - 6 = x + 1$

$$2x - 6 - 1 = x$$
$$2x - 7 = x$$
$$2x = x + 7$$
$$2x - x = 7$$
$$x = 7$$ Столько ведерЪ вина находилось у осла вЪ мѣху.

Слѣдовательно у ослицы вЪ мѣху находилось ведерЪ вина $7 - 2 = 5$. Ибо $7 - 1 = 6$, и $5 + 1 = 6$; также $5 - 1 = 4$ и $7 + 1 = 8$.

6. ВЪ одномЪ городѣ находились отЪ части Нѣмцы, отЪ части Агличане, отЪ части Голландцы и отЪ части Ишпанцы: и во время продолжавшейся осады того города, померло изЪ НѣмцовЪ, АгличанЪ и ГолландцовЪ вмѣстѣ столько, сколько составляютЪ Ишпанцы и сверьхЪ того 620 человѣкЪ; изЪ НѣмцовЪ, АгличанЪ и ИшпанцовЪ вмѣстѣ померло столько, сколько числомЪ было всѣхЪ ГолландцовЪ, и сверьхЪ того 460 человѣкЪ; изЪ НѣмцовЪ, ГолландцовЪ и ИшпанцовЪ вмѣстѣ столько померло, сколько составляютЪ всѣ Агличане сЪ 380 человѣками, и наконецЪ изЪ АгличанЪ, ГолландцовЪ и ИспанцовЪ вмѣстѣ столько померло, сколько составляютЪ Нѣмцы, и сверьхЪ того 500 человѣкЪ. Спр. сколько померло вЪ особливости НѣмцовЪ, АгличанЪ, ГолландцовЪ и ИшпанцовЪ?

Поло-

Положивъ, что находилось Нѣмцовъ u, Агличанъ x, Голландцовъ y, Ишпанцовъ z; то будетъ

$u+x+y=z+620 \quad u+x+y-620=z$

$u+x+2=y+460$

$u+y+z=x+380$

$x+y+z=u+500$

$u+x+z=y+460$

$u+x+u+x+y-620=y+460$

(§. 31. Ариѳ.)

$2u+2x+y-620=y+460$

$2u+2x+y=y+460+620$

$2u+2x+y=y+1080$

$2u+2x=1080$

$2u=1080-2x$

$u+y+z=x+380$

$u+y+u+x+y-620=x+380$ (§. 31. Ариѳ.)

$2u+2y+x-620=x+380$

$2u+2v+x=x+380+620$

$2u+2y+x=x+1000$

$2u+2y=1000$

$2y=1000-2u$

$x+y+z=u+600$

$x+y+u+x+y-620=u+500$ (§. 31. Ариѳ.).

$2x+2y+u-620=u+500$

$2x+2y+u=u+500+620$

$2x+2y+u=u+1120$

$2x+2y=1120$

$2x=1120-2x$

$$2u = 460 + 620 - 2x$$
$$2u = 1080 - 2x$$
$$2u = 1080 - (620 + 500) - (620 + 380) - 2u$$
$$2u = 1080 - (1120 - 1000) - 2u$$
$$2u = 1080 - 120 - 2u$$
$$4u = 960$$
$$u = \frac{960}{4} = 240.$$ Столько Нѣмцовъ померло въ особливости.
$$2y = 620 + 380 - 2u$$
$$2y = 1000 - 480$$
$$2y = 520$$
$$y = 520 : 2 = 260.$$ Столько Голландцовъ померло.
$$2x = 620 + 500 - 3y$$
$$2x = 1120 - 520$$
$$2x = 600$$
$$x = 600 : 2 = 300$$ Столько. Агличанъ померло,
$$u = 240$$
$$y = 260$$
$$x = 300$$
$$u + y + x = 800 - 620 = 180.$$ Столько Ишпанцовъ померло.

Ибо $240 + 300 + 260 = 800 = 180 + 620$, и $240 + 300 + 180 = 720 = 260 + 460$.

7. Найти два такія числа, чтобъ произведеніе оныхъ было равно суммѣ, а разности бы больще было вчетверо?

Поло-

Положивъ, что большое число $= x$, меньшое $= y$; то будетъ

$$x \quad\quad xy = (x - y)4$$
$$\underline{y} \quad\quad xy = 4x - 4y$$
$$xy = x + y$$
$$x + y = 4x - 4y$$
$$y = 3x - 4y$$
$$5y = 3x$$
$$\frac{5y}{3} = x$$
$$xy = x + y$$
$$\frac{5y \times y}{3} = \frac{5y}{3} + y$$
$$5y = 5 + 3$$
$$5y = 8$$
$$y = 8 : 5 = 1\tfrac{3}{5}.$$ Меньшое число.

Слѣдовательно большое число $= 2\frac{2}{3}$. Ибо $1\frac{3}{5} \times 2\frac{2}{3} = 4\frac{4}{15}$ и $1\frac{3}{5} + 2\frac{2}{3} = 4\frac{4}{15}$.

8. Найти три числа такія, изъ которыхъ бы первое равно было второму безъ 16, второе равно третьему безъ 2, сумма жъ всѣхъ равна была 94.

Положивъ, что первое число $= x$, второе $= y$, третіе $= z$; то будетъ

$$x = y - 16 \quad\quad y = z - 2$$
$$x + 16 = y \quad\quad z = y + 2$$
$$x = x + 16 - 16$$

$$y = x + 16$$
$$z = x + 16 + 2$$
$$3x + 34 = 94$$
$$3x = 60$$
$$x = 60 : 3 = 20.$$ Первое число.

Слѣдовательно второе $20 + 16 = 36$, а третіе $20 + 18 = 38$. Ибо $20 + 36 + 38 = 94$.

9. Число 178 раздѣлить на три части такъ, чтобъ $\frac{1}{5}$ первой части была въ восьмеро больше третьей, а третья ввосьмеро меньше $\frac{1}{6}$ второй части.

Положивъ, что первая часть $= x$, вторая $= y$, третья $= z$; то будетъ

$$\frac{x}{5} = 8z \qquad \frac{y}{6} = 8z$$
$$x = 40z \qquad y = 48z$$
$$z + 40x + 48z = 178$$
$$89z = 178$$
$$z = 178 : 89 = 2.$$ Третья часть.

Слѣдовательно вторая часть $48 \times 2 = 96$, а первая $40 \times 2 = 80$; ибо $2 + 96 + 80 = 176$

10. 154. руб. раздѣлить на 3 человѣка такъ, чтобъ $\frac{1}{3}$ удѣла, принадлежащаго первому равна была $\frac{1}{4}$ удѣла, при- принадлежащаго второму; притомъ, когда

гда первой получитъ $2\frac{1}{2}$ руб. третей бы тогда взялъ 7 руб. Спр. сколько которому изъ тѣхъ денегъ достанется?

Положивъ, что первой изъ той суммы получилъ x, второй y, третей z; то будетъ

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$$

$$3y = 4x$$

$$y = \frac{4x}{3}$$

$$2\tfrac{1}{2} : x = 7$$

$$\frac{14x}{5} = z$$

$$x + \frac{4x}{3} + \frac{14x}{5} = 154$$

$$15x + 20x + 42x = 2310$$

$$77x = 2310$$

$x = 2310 : 77 = 30$. Удѣлъ перваго.

Слѣдовательно удѣлъ втораго $30 \times 4 = 120 : 3 = 40$; удѣлъ третьяго $30 \times 14 = 420 : 5 = 84$. Ибо $30 + 40 + 84 = 154$.

11. Два человѣка имѣли по нѣсколько денегъ: первой говорилъ другому, ежели я изъ твоихъ денегъ получу $\frac{2}{5}$, то буду имѣть 60 руб. а второй сказалъ первому: ежели я изъ твоихъ денегъ получу

$\frac{3}{4}$;

$\frac{3}{4}$; то буду имѣть 80 руб. Спр. по скольку денегъ каждой изъ нихъ имѣлъ?

Положивъ, что первой имѣлъ денегъ x, другой y; то будетъ

$$x + \frac{2y}{5} = 50 \qquad y + \frac{3x}{4} = 80$$

$$5x + 2y = 250$$

$$2y = 250 - 5x$$

$$y = \frac{250 - 5x}{2}$$

$$\frac{250 - 5x}{2} + \frac{3x}{4} = 80 \text{ (§ 31. Ариѳ.)}$$

$$250 - 5x + \frac{3x}{2} = 160$$

$$500 - 10x + 3x = 320$$

$$500 - 7x = 320$$

$$7x = 180$$

$x = 180 : 7 = 25\frac{5}{7}$. Столько денегъ имѣлъ первой.

Слѣдов. втор. имѣлъ $\frac{250 - 25\frac{5}{7} \times 5}{2} = 60\frac{5}{7}$

Ибо $60\frac{5}{7} : \frac{2}{5} = 24\frac{2}{7} + 25\frac{5}{7} = 50$, и $25\frac{5}{7} : \frac{3}{4} = 19\frac{2}{7} + 60\frac{5}{7} = 80$.

12. Четверо вообще имѣли нѣкоторую сумму денегъ, выключая перваго, было у всѣхъ 125 руб. безъ денегъ перваго было у нихъ 115 руб. безъ денегъ третьяго находилось у нихъ 100 руб. безъ денегъ же четвер-

четвертаго было у нихЪ 95 руб. Спр. по скольку денегЪ каждой изЪ нихЪ имѣлЪ?

ПоложивЪ, что первой имѣлЪ денегЪ x второй y, третей z, четвертой v, всяжЪ сумма S; то будетЪ

$$S - x = 125$$
$$S - y = 115$$
$$S - z = 100$$
$$S - v = 95$$
$$4S - 435 = S$$
$$3S = 435$$
$$S = 435 : 3 = 145.$$ Вся сумма

Слѣдовательно первой имѣлЪ денегЪ $145 - 125 = 20$; второй $145 - 115 = 30$; третей $145 - 100 = 45$, четвертой $145 - 95 = 50$. Ибо $20 + 30 + 45 + 50 = 145$.

13. Трое имѣли по нѣскольку денегЪ, такЪ что ежели первой возметЪ $\frac{1}{2}$ изЪ всѣхЪ денегЪ втораго, второй $\frac{1}{3}$ изЪ всѣхЪ денегЪ третьяго, а третей $\frac{1}{4}$ изЪ всѣхЪ денегЪ перваго; то у всякаго изЪ нихЪ будетЪ по 100 руб. Спр. по скольку денегЪ каждой изЪ нихЪ имѣлЪ?

ПоложивЪ, что первой имѣлЪ денегЪ x, второй y, третей z; то будетЪ

$$x + \frac{y}{2} = 100; \quad y + \frac{z}{3} = 100; \quad z + \frac{x}{4} = 100;$$
$$2x + y = 200$$
$$y = 200 - 2x$$

$$y + \frac{z}{7} = 100$$

$$200 - 2x + \frac{z}{3} = 100 \text{ (§. 31. Ариѳ.)}$$

$$600 - 6x + z = 300$$

$$300 - 6x + z = 0$$

$$z = 6x - 300$$

$$z + \frac{x}{4} = 100$$

$$6x - 300 + \frac{x}{4} = 100 \text{ (31. Ариѳ.)}.$$

$$24x - 1200 + x = 400$$

$$25x = 1600$$

$x = 1650 : 25 = 64$. Столько денегъ имѣлъ первой.

Слѣдовательно второй $200 - (64 \times 2 = 128) = 72$; третей $64 \times 6 = 384 - 300 = 84$. Ибо $64 + \frac{72}{2} = 100$, $72 + \frac{84}{3} = 100$ и $84 + \frac{64}{4} = 100$.

14. Трое имѣли по нѣскольку денегъ: у перваго со вторымъ было 70 руб. у перваго съ третьимъ находилось 170 руб. а вторый съ третьимъ имѣлъ 230 руб. Спр. Сколько денегъ каждой изъ нихъ имѣлъ?

Положивъ, что первой имѣлъ денегъ x, второй y, третей z; то будетъ

$$x + y = 70$$

$$x + z = 170$$

$$z + y = 230$$

$2x + 2y + 2z = 470$
$x + y + z = 235$
$x + y = 70$ вычтено

$z = 165$. Столько денегъ имѣлъ третей.

Слѣдовательно второй имѣлъ $230 - 165 = 65$, первой $70 - 65 = 5$. Ибо $5 + 65 = 70$; $5 + 165 = 170$; $165 + 65 = 230$.

15. 126 раздѣлить на три части такъ, чтобъ, когда первая часть раздѣлится на 5, вторая умножится на 8, изъ третьей вычтется 12; частное число, произведеніе и остатокъ были равны между собою. Спр. какія суть именно тѣ части?

Положивъ, что первая часть $= x$, вторая $= y$, третья $= z$; то будетъ

$$x + y + z = 126$$

но $\frac{x}{5} = 8y = z - 12$

$40y = x$ и $5z - 60 = x$

$y = \frac{x}{40}$ $\quad 5z = x + 60$

$$z = \frac{x + 50}{5}$$

$$x + \frac{x}{40} + \frac{x + 60}{5} = 126$$

$200x + 5x + 40x + 2400 = 25200$

$245x + 2400 = 25200$

$245x = 22800$

$x = 22800 : 245 = 93\frac{3}{49}$. Первая часть.

СлЂдовательно вторая часть $93\frac{3}{49} : 40 = 2\frac{16}{49}$; третья $93\frac{3}{49} + 60 : 5 = 30\frac{30}{49}$. Ибо $93\frac{3}{4} + 2\frac{16}{49} + 30\frac{30}{49} = 126$.

16. Ежели изЪ троихЪ первой возьметЪ 46 руб. у втораго, то онЪ сдЂлается вдвое богатЂе его; ежелижЪ второй получитЪ отЪ третьяго 60 руб. то онЪ будетЪ втрое богатЂе третьяго; а естьли третей возьметЪ у перваго 92 руб. то онЪ сдЂлается вчетверо богатЂе перваго. Спр. По скольку денегЪ у каждаго изЪ нихЪ было?

Положивъ, что первой имЂлЪ денегЪ x, второй y, третей z; то будетЪ

$$x + 46 = 2y + 92 \qquad y + 69 = 3z - 207$$
$$x + 46 + 92 = 2y \qquad y = 3z - 207 - 69$$
$$x + 138 = 2y \qquad y = 3z - 276$$
$$y = \frac{x + 138}{2}$$

$$z + 92 = 4x - 368$$
$$z + 460 = 4x$$
$$x = \frac{z + 460}{4}$$

$$\frac{x + 138}{2} = 3z - 276$$
$$x + 138 = 6z - 552$$
$$138 + \frac{z + 460}{4} = 6z - 552$$
$$552 + z + 460 = 24z - 2208$$
$$z + 1012 = 24z - 2208$$

z

$z + 3220 = 24z$

$3220 = 23z$

$z = 3220 : 23 = 140$, Столько денегъ имѣлъ третей.

Слѣдовательно первой $\frac{140 + 460}{4} = 150$; второй $140 \times 3 = 420 - 276 = 144$. Ибо $150 + 46 = 196 = 114 - 46 = 98 \times 2 = 196$.

17. Трое издержали нѣкоторую сумму денегъ: первой со вторымъ вмѣстѣ издержалъ 2 руб. больше третьяго, первой съ третьимъ 6. руб. больше втораго, а третей со вторымъ 10. руб. больше перваго. Спр. По скольку каждой изъ нихъ издержалъ?

Положивъ, что первой издержалъ денегъ x, второй y, третей z; то будетъ

$x + y = z + 2$

$x + z = y + 6$

$y + z = x + 10$

$2x + 2y + 2z = x + y + z + 18$

$x + y + z = 18$

$x = 18 - y - z$

$x = 18 - x - 10$ (§. 32. Ариѳ)

$2x = 18 - 10$

$2x = 8$

$x = 8 : 2 = 4$. Столько издержалъ первой.

$x + y + z = 18$

$y = 18 - x - z$

$y = 18 - y - 6$ (§. 32. Ариѳ.)
$2y = 18 - 6$
$2y = 12$
$y = 12 : 2 = 6$. Столько издержалъ второй.

$$x + y + z = 18$$
$$z = 18 - x - y$$
$z = 18 - z - 2$ (§. 32. Ариѳ.)
$$2z = 18 - 2$$
$$2z = 16$$
$z = 16 : 2 = 8$. Столько издержалъ третей.

Ибо $4 + 6 = 8 + 2 = 10$; $4 + 8 = 6 + 6 = 12$, и $6 + 8 = 4 + 10 = 14$.

18. Изъ троихъ первой сказалъ прочимъ: дайте мнѣ 2. руб. то у меня будетъ столько денегъ, сколько у васъ останется; второй въ такомъ же смыслѣ требовалъ 3 руб. а третей 4. руб. Спр. по скольку денегъ каждой изъ нихъ имѣлъ?

Положивъ, что первой имѣлъ денегъ x, второй y, третей z, а всѣхъ ихъ троихъ сумма S; то будетъ

$$x + y + z = S$$
$$x + 2 = S - x - 2 \quad y + 3 = S - y - 3 \quad z + 4 = S - z - 4$$
$$2x + 2 = S - 2 \quad 2y + 3 = S - 3 \quad 2z + 4 = S - 4$$
$$2x = S - 4 \quad 2y = S - 6 \quad 2z = S - 8$$
$$x = \frac{S - 4}{2} \quad y = \frac{S - 6}{2} \quad z = \frac{S - 8}{2}$$

$$\frac{S-4}{2} + \frac{S-6}{2} + \frac{S-8}{2} = S$$

$S - 4 + S - 6 + S - 8 = 2S$

$3S - 18 = 2S$

$3S = 2S + 18$

$S = 18$ Столько денегъ всѣ трое имѣли.

Ибо $7 + 2 = 9 = 6 + 5 - 2 = 9$, и $6 + 3 = 9 = 7 + 5 - 3 = 9$ также; $5 + 4 = 9 = 7 + 6 - 4 = 9$.

19. Нѣкто имѣлъ три коня, да сѣдло съ приборомъ въ 55. руб. первой осѣдланной конь стоитъ столько, сколько второй и третей конь вмѣстѣ неосѣдланные; второму осѣдланному цѣна была вдвое больше перваго и третьяго коня неосѣдланныхъ; осѣдланой же третей конь стоилъ втрое больше перваго и втораго коня неосѣдланныхъ. Спр. чего стоитъ каждой конь.

Положивъ, что первой конь стоитъ x, второму цѣна y, а третьему z; то будетъ

$x + 55 = y + z$, $y + 55 = 2x + 2z$, $z + 55 = 3x + 3y$

$x = y + z - 55$, $y + 55 - 2x = 2z$, $z + 55 - 3y = 3x$

$$\frac{y + 55 - 2z}{2} = x, \quad \frac{z + 55 - 3y}{3} = x$$

$y+z-55=\frac{y+55-2z}{2}$, $y+z-55=\frac{z+55-3y}{3}$

$2y+2z-110=y+55-2z$, $3y+3z-165=z+55-3y$

$y+2z-110=55-2z$, $3y+2z-165=55-3y$

$y-110=55-4z$, $6y+2z-165=55$

$y+4z=110=55$ $6y+2z=220$

$y+4z=165$ $6y=220-2z$

$y=165-4z$ $y=\frac{220-2z}{6}$

$$165-4z=\frac{220-2z}{6}$$

$$990-24z=220-2z$$

$$990-220-24z=2z$$

$$770-24z=2z$$

$$770-22z=0$$

$$770=22z$$

$z=\frac{770}{22}=35$. Цѣна третьему коню.

Слѣдовательно второму коню цѣна $165-35\times4=25$; первому $25+35=60-55=5$. Ибо $5+55=60$, и $25+35=60$.

20. Трое положили въ складку: первой положилъ столько, сколько имѣлъ второй, и сверьхъ того $\frac{1}{3}$ денегъ третьяго; второй столько, сколько имѣлъ третей и сверьхъ $\frac{1}{3}$ денегъ перваго; а третей положилъ 10. руб. и сверьхъ $\frac{1}{3}$ денегъ первагожъ. Спр. по скольку денегъ каждой изъ нихъ положилъ въ складку?

Поло-

Положивъ, что первой положилъ a, второй b, а третей c; то будетъ

$$a = b + \frac{1}{3}c,\quad b = c + \frac{1}{3}a,\quad c = 10 + \frac{1}{3}a$$

$$a = \frac{3b + c}{3},\quad b - c = \frac{1}{3}a,\quad c - 10 = \frac{1}{3}a$$

$$3b - 3c = a \qquad 3c - 30 = a$$

$$\frac{3b + c}{3} = 3b - 3c,\quad 3b - 3c = 3c - 30$$

$$3b + c = 9b - 9c,\quad 3b = 6c - 30$$

$$c = 6b - 9c,\quad b = 2c - 10$$

$$0 = 6b - 10c$$

$$\frac{10c}{6} = 2c - 10$$

$$6b = 100 \qquad 100 = 12c - 60$$

$$b = \frac{10c}{6} \qquad 0 = 2c - 60$$

$$60 = 2c$$

$c = 60 : 2 = 30$. Столько денегъ третей положилъ въ складку.

Слѣдовательно второй положилъ $\frac{30 \times 10}{6} = 50$; первой положилъ $50 \times 3 = 150 - (30 \times 3) = 60$. Ибо $60 = 50 + \frac{30}{3} = 60$.

21. Данъ путь дневной одного ходока и путь дневной другаго ходока, въ данное время за первымъ пошедшаго; найти время, въ которое онъ настижетъ перваго?

Положивъ, что путь дневной перваго ходока $= a$, втораго $= b$, данное время $= c$, искомое время $= x$, то будетъ путь, въ данное время первымъ перейденной $= a\,c$, и что онъ же въ искомое время перейдетъ $= a\,x$; путь же втораго, въ искомое время перейденной $= b\,x$; то, въ силу содержанія задачи, будетъ слѣдующее сравненіе:

$$a\,c + a\,x = b\,x$$

$$a\,c = b\,x - a\,x$$

$$\frac{a\,c}{b-a} = x.$$ Искомое время.

То есть, ежели $a = 6, b = 8, c = 4$; то будетъ $x = 24 : 2 = 12$. Ибо естьли первой ходокъ въ 16, а другой въ 12 дней переходятъ показанной путь, пока не сойдутся вмѣстѣ, и первой изъ нихъ идетъ по 6 верстъ на день, а другой по 8 верстъ; то путь перваго будетъ $6 \times 16 = 96$, а втораго $8 \times 12 = 96$.

ПРИМѢЧАНІЕ.

§. 107. Поелику изъ сравненія $a\,c = b\,x - a\,x$ можно вывести слѣдующую пропорцію: $b - a : a = c : x$; то изъ сего происходитъ слѣдующее правило:

Ежели одинъ ходокъ догоняетъ другаго, по прошествіи нѣкотораго времени; то въ такомъ случаѣ разность путей, которые

торые въ одно время переходятъ оба ходока, къ пути перваго будетъ содержаться такъ, какъ время, съ начала пути перваго, до начала пути втораго прошедшее, содержится къ времени, въ которое второй ходокъ догоняетъ перваго.

22. Данъ путь дневной одного ходока и притомъ извѣстно время, съ начала пути его минувшее; найти путь дневной втораго ходока, то есть, по скольку верстъ на день долженъ итти второй ходокъ, чтобъ онъ могъ въ данное время догнать перваго ходока?

Положивъ, что путь дневной перваго ходока $= a$, минувшее время $= b$, данное время $= c$, путь дневной втораго ходока $= x$; то будетъ

$$ab + ac = cx$$

$$\frac{ab + ac}{c} = x$$

На пр. $a = 6$, $b = 4$, $c = 12$; то будетъ $x = \frac{24 + 72}{12} = 8$.

ПРИМѢЧАНІЕ.

§. 108. Поелику изъ сравненія $ab + ac = cx$ можно вывести слѣдующую пропорцію: $c : b + c = a : x$; то изъ сего происходитъ слѣдующее правило:

 Ежели

Ежели одинЪ ходокЪ догоняетЪ другаго, по прошествіи нѢкотораго времени; то вЪ такомЪ случаѢ время, вЪ которое онЪ догоняетЪ другаго, кЪ времени, сЪ начала пути минувшему, будетЪ содержаться такЪ, какЪ дневной путь перваго ходока содержится кЪ дневному пути втораго ходока.

23. Дано разстояніе мѢстЪ, изЪ коихЪ вЪ одно время пошли два ходока, и притомЪ извѢстенЪ дневной путь обоихЪ; найти время, вЪ которое они встрѢтятся между собою?

ПоложивЪ, что разстояніе мѢстЪ $=$ a, дневной путь перваго $=$ b, дневной путь втораго $=$ c, времяжЪ встрѢчи ихЪ $= x$; то путь первымЪ ходокомЪ во время x перейденной будетЪ $= bx$, путь вторымЪ ходокомЪ вЪ тоже время перейденной $= cx$.

По чему, когда они оба перешли все разстояніе мѢстЪ, изЪ коихЪ вЪ одно время пошли, будетЪ

$$bx + cx = a$$

$$\frac{bx + cx}{b + c} = x = \frac{a}{b + c}$$

Напр. $a = 120$, $b = 6$, $c = 4$; то будетЪ $x = \frac{120}{10} = 12$. Время, вЪ которое они встрѢтятся между собою.

24.

24. Дана цѣна одной мѣры вина; найти, сколько воды надобно прибавить въ ту мѣру, чтобы можно было продавать оное смѣшеніе меньшею противъ прежняго цѣною?

Положивъ, что большая цѣна вина $= a$, меньшая $= b$, количество воды $= x$; то, поелику вода никакой цѣны не имѣетъ, будетъ

$$1 + x : 1 = a : b$$
$$b + bx = a$$
$$bx = a - b$$
$$x = \frac{a - b}{b} = a : b - 1$$

На пр. $a = 16$, $b = 10$; то будетъ $x = \frac{16}{10} - 1 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

ПРИМѢЧАНІЕ

§. 109. Поелику изъ сравненія $bx = a - b$ можно вывести такую пропорцію: $x : 1 = a - b : b$; то изъ сего происходитъ слѣдующее правило:

Количество примѣшиваемой воды къ количеству вина содержится такъ, какъ разность цѣнъ къ меньшей цѣнѣ.

25. Даны цѣны дорогаго и дешеваго вина; найти, сколько изъ котораго должно взять въ смѣшеніе, чтобъ из-

вѣ-

вѣстную смѣшеннаго вина мѣру можно было продавать по данной средней цѣнѣ?

Положивъ, что цѣна одной мѣры вина дорогаго $= a$, дешеваго $= b$, цѣна средняя $= c$, количество одной мѣры $= 1$, количество дешеваго вина, употребленнаго въ смѣшеніе $= x$; то будетъ цѣна онаго $= bx$, количество дорогаго вина, употребленнаго въ смѣшеніе $= 1 - x$, цѣна онаго $= a - ax$; и такъ

$$a - ax + bx = c$$
$$a + bx = c + ax$$
$$a = c + ax - bx$$
$$a - c = ax - bx$$
$$\frac{b - c}{a - b} = x$$

На пр. $a = 16$, $b = 10$, $c = 12$; то будетъ $x = \frac{16 - 12}{16 - 10} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

26. Трое приторговали вообще 9000 руб. но изъ того барыша первой со вторымъ взялъ 5000 руб. первой съ третьимъ 6000 руб. а второй съ третьимъ 7000 руб. Спр. Сколько которой въ особливости взялъ изъ того барыша?

Поло-

ПоложивЪ, что бирышЪ перваго $= x$, втораго $= y$, третьяго $= z$, $5000 = b$, $6000 = c$, $7000 = d$; то будетЪ

$$x + y = b \qquad x + z = c \qquad y + z = dy$$
$$x = b - y \qquad x = c - z \qquad z = d -$$
$$b - y = c - z - y$$
$$b - y = c - d + y$$
$$b = c - d + 2y$$
$$b + d = c + 2y$$
$$b + d - c = 2y$$
$$\frac{b + d - c}{2} = y$$

То есть, $y = 5000 + 7000 - 6000 = 6000 : 2 = 3000$; $x = 5000 - 3000 = 2000$; $z = 7000 - 3000 = 4000$. Ибо $3000 + 2000 + 4000 = 9000$.

27. Трое положили вЪ складку: первой изЪ нихЪ положилЪ 20 руб. на 3 мѢсяца; второй 40 руб. на 4 мѢсяца; третей 50 руб. на 5 мѢсяцевЪ; и приторговали вообще 80. руб. Спр. Сколько которой получитЪ изЪ того барыша?

ПоложивЪ, что складка перваго $= a$, втораго складка $40 = b$, третьяго $50 = c$, весь барышЪ $80 = d$; барышЪ перваго $= x$, втораго $= y$, третьяго $= z$; то будетЪ

$$x + y + z = d$$
$$x : y = 3a : 4b \qquad y : z = 4b : 5c$$

x:

$$x : 3a = y : 4b \qquad y : 4b = z : 5c$$
$$3a : x = 4b : y \qquad 4b : y = 5c : z$$
$$3a : x = 4b : y = 5c : z$$
$$3a + 4b + 5c : x + y + z = 3a : x$$
$$= 4b : y$$
$$= 5c : z$$
$$3a + 4b + 5c : d = 3a : x$$
$$\frac{3ad}{3a + 4b + 5c} = x$$
$$\frac{3bd}{3a + 4b + 5c} = y$$
$$\frac{5cd}{3a + 4b + 5c} = z$$

То есть, $x = 4800 : 470 = 10 \frac{10}{47}$; $y = 12800 : 470 = 27 \frac{11}{47}$; $z = 20000 : 470 = 42 \frac{26}{47}$. Ибо $10 \frac{10}{47} + 27 \frac{11}{47} + 42 \frac{26}{47} = 80$.

28. НѢкто на 4 руб. и 8 гривенъ купилъ 80 птицъ, то есть, гусей, утокъ и цыплятъ; за каждаго гуся платилъ по 12 копѢекъ, за каждую утку по 6 копѢекъ и за каждаго цыпленка по 3 копѢйки. Спр. Сколько какихъ птицъ въ особливости куплено?

Положивъ, что гусей куплено $= x$, утокъ $= y$, цыплятъ $86 - x - y$; то будетъ

x	y	$80 - x - y$
12	6	3

$$12x + 6y + 240 - 3x - 3y = 480$$
$$4x + 2y + 80 - x - y = 160$$
$$3x + y = 160 - 180 = 80$$
$$y = 80 - 3x \quad .$$

И такъ, ежели $x = 10$, будетъ $y = 50$, а цыплятъ $= 20$. Ибо $10 + 50 + 20 = 80$.

29. Случилось 24 человѣкамъ, то есть, Грекамъ, Туркамъ и Французамъ вмѣстѣ ѣхать моремъ, съ коихъ за провозъ взято 64 гривны; Греки заплатили по 2 гривны, Турки по 4 гривны, а Французы по 6 гривенъ. Спр. Сколько было въ томъ числѣ Грековъ, Турокъ и Французовъ?

Положивъ, что было Грековъ $= x$, Турокъ $= y$, Французовъ $= 24 - x - y$; то будетъ

$$\begin{array}{ccccc} x & & y & & 24 - x - y \\ 2 & & 4 & & 6 \\ \hline 2x & + & 4y & + & 144 - 6x - 6y = 64 \end{array}$$
$$144 - 4x - 2y = 64 \text{ разд. на } 2.$$
$$72 - 2x - y = 32$$
$$40 - 2x - y = 0$$
$$y = 40 - 2x$$

И такъ, ежели $x = 18$, будетъ $y = 4$, а Французовъ $= 2$. Ибо $18 + 4 + 2 = 24$.

ПРИМѢЧАНІЕ

§. 110. Изъ рѣшеній сихъ двухъ послѣднихъ задачъ явствуетъ, что первая изъ оныхъ можетъ рѣшена быть 26 разъ, то есть, вмѣсто x въ оной можно взять по изволенію отмѣнныя числа 26 разъ. Ибо $26 \times 3 = 78$; 27 же разъ по изволенію отмѣнныя числа брать не можно, по тому что $27 \times 3 = 81$ превышаетъ сіе число данное въ задачѣ 80 единицею. А вторая задача можетъ рѣшиться точно 12 разъ. Ибо $12 \times 2 = 24$. То есть, вмѣсто x въ оной можно взять отмѣнныя числа 12 разъ.

ПРИМѢРЫ ЗАДАЧЪ,

состоящихъ изъ смѣшенноквадратнаго сравненія.

1. Найти такое число, которое бы умножено будучи на 8 вмѣстѣ съ квадратомъ своимъ равно было 660.

Положивъ, что искомое число $= x$, то, въ силу содержанія задачи, будетъ слѣдующее сравненіе:

$$x.\,8 = 8x + x^2 = 66$$

$$16 \qquad 16 \text{ дополн. квад. изъ } \tfrac{8}{2} = 4$$

$$x^2 + 8x + 16 = 660 + 160$$

$$\sqrt{x^2 + 8x + 16} = 676$$

$$x + 4 = 26$$

$x = 26 - 4 = 22$. Искомое число.

Ибо

Ибо $22 \times 22 = 484 + (22 \times 8) = 660$.

2. Найти такое число, которое бы умножено будучи на 6 и изЪ квадрата своего вычтено, было равно 72.

ПоложивЪ, что искомое число $= x$; то будетЪ

$$x^2 - 6x = 72$$
$$\underline{\quad 9 \qquad 9} \text{ дополн. квадр. изЪ } \tfrac{6}{2} = 3$$
$$x^2 - 6x + 9 = 72 + 9$$
$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 81$$
$$x - 3 = 9$$

$x = 12$. Искомое число.

Ибо $12 \times 12 = 144 - (12 \times 6) = 72$.

3. Найти такое число, которое бы сложено будучи сЪ 156, было равно квадрату своему.

ПоложивЪ, что неизвѢстное число $= x$; то будетЪ

$$x^2 = x + 156$$
$$x^2 - x = 150$$
$$\sqrt{x^2 - x + \tfrac{1}{4}} = 156 + \tfrac{1}{4}$$
$$x - \tfrac{1}{2} = 12\tfrac{1}{2}$$

$x = 13$. Искомое число.

Ибо $13 \times 13 = 169 = (156 + 13) = 169$.

4. Число 30. раздѢлить на двѢ части такія, чтобы квадраты оныхЪ содержались между собою, какЪ $9 : 4$.

Поло-

Положивъ, что первая часть изъ даннаго числа $= x$, вторая $= 30 - x$; то будетъ

$$x^2 : 900 - 60x + x^2 = 9 : 4$$
$$4x^2 = 8100 - 540x + 9x^2$$
$$8100 - 540x + 9x^2 - 4x^2 = 0$$
$$8100 - 540x + 5x^2 = 0$$
$$8100 + 5x^2 = 540x$$
$$5x^2 = 540x - 8100$$
$$x^2 = \frac{540x - 8100}{5}$$
$$x^2 - 108x = -1620$$

2916   2916 доп. кв. из. $\frac{108}{2} = 54$

$$x^2 - 108x + 2916 = 1620 - 2916$$
$$\sqrt{x^2 - 108x + 2916} = 1296$$
$$x - 54 = 39$$
$$x - 54 - 36 = 0$$
$$x - 18 = 0$$

$x = 18$. Первая часть неизвѣст. числа.

Слѣдовательно вторая часть $30 - 18 = 12$. Ибо $18 \times 18 = 324$, и $12 \times 12 = 144$. И потому

$$324 : 144 = 9 : 4.$$

36

То есть, $\frac{324}{144} \Big| \frac{9}{4} = \frac{9}{4}.$

5. Нѣкто отдавъ въ долгъ 2500 руб. по прошествіи двухъ лѣтъ получилъ всего и съ процентами 3025 руб. Спр. сколь великъ былъ процентъ?

Положивъ, что проценту получаемо было со 100 рубл. по x; то будетъ

$100 : x = 2500$

$\frac{2500x}{100} = 25x$ въ первой годъ процентъ.

$100 : x = 2500 + 25x$

$\frac{2500 + 25x^2}{100}$ во второй годъ процентъ.

$2500 + 25x + \frac{2500 + 25x^2}{100} = 3025$

$250000 + 2500x + 2500 + 25x^2 = 302500$

$2500x + 2500x + 25x^2 = 302500 - 250000$

$2500x + 2500x + 25x^2 = 52500$

$5000x + 25x^2 = 52500$

$25x^2 + 5000x = 52500$

$x^2 + 200x = 2100$

$\underline{10000 \quad 10000}$ допол. квадр. изъ $\frac{200}{2} = 100$

$x^2 + 200x + 1000 = 2100 + 1000$

$\sqrt{x^2 + 200x + 10000} = 12100$

$x + 100 = 110$

$x = 110 - 100 = 10.$ По стольку руб. было получаемо проценту на 100 руб.

Ибо $100 : 10 = 250 : 250$ въ первой год. проц.
$100\ 10 : = 2750 : 275$. во втор. год. проц.

И такъ $250 + 275 + 2500 = 3025$.

6. Нѣсколько прохожихъ должны были заплатить за ночлегъ 1. руб. 75. копѣекъ. Но какъ двое изъ нихъ ушли тайно; то на каждаго человѣка изъ оставшихся прибавилось за ушедшихъ платить лишку по 10. копѣекъ противъ настоящаго платежа. Спр. сколько было прохожихъ?

Положивъ, что число прохожихъ было $= x$, а останется ихъ $= x - 2$, то будетъ

$x : 175 = 1 : \frac{175}{x}$. По стольку бы коп. каждой изъ всѣхъ долженъ былъ заплатить.

$x - 2 : 175 = 1 : \frac{175}{x-2}$. По стольку коп. каждой изъ оставшихся заплат.

$$\frac{175}{x} = \frac{175}{x-2} - 10$$

$$\frac{175}{x} = \frac{175 - 10x + 20}{x - 2}$$

$$175 - 350 = 175x - 10x^2 + 20x$$

$$-350 = 175x - 175x - 10x^2 + 20x$$

$$-350 = -10x^2 + 20x$$

$$10x^2 - 350 = 20x$$

$$x^2 - 35 = 2x$$

x^2

$$x^2 = 2x + 35$$
$$x^2 - 2x = 35$$
$$1 \quad 1.\ \text{доп. кв. изЪ}\ \tfrac{2}{2} = 1$$
$$x^2 - 2x + 1 = 35 + 1$$
$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 36$$
$$x - 1 = 6$$
$$x = 7.$$ Число прихожихЪ.

Ибо $175 : 7 = 25$, и $175 : (7 - 2) = 35$; и такЪ $35 - 25 = 10$.

7. На двѢ неравныя части по 1200. руб. раздѢлить такЪ, чтобЪ каждой человѢкЪ изЪ меньшей части получилЪ 5. руб. свыше противЪ каждаго изЪ большей; вЪ первой же части находилось 40 человѢкЪ больше, нежели во второй. Спр. по скольку человѢкЪ находилось вЪ каждой части?

ПоложивЪ, что вЪ меньшей части находилось людей $= x$; а вЪ большей $x + 40$; то будетЪ

$$\frac{1200}{x} = \frac{1200}{x+40} + 5$$
$$\frac{1200}{x} = \frac{1200 + 5x + 200}{x+40}$$
$$\frac{1200}{x} = \frac{1400 + 5x}{x+40}$$
$$1400x + 5x^2 = 1200x + 48000.$$
$$1400x - 1200x + 5x = 48000$$
$$200x + 5x^2 = 48000$$

$$5x^2 + 200x = 48000$$
$$x^2 + 40x = 9600$$
$$400 \quad 400 \text{ допол. кв. изъ } \tfrac{40}{2} = 20$$
$$x^2 + 40x + 400 = 9600 + 400$$
$$\sqrt{x^2 + 40x + 400} = 10000$$
$$x + 20 = 100$$

$x = 80$. Столько людей было меньшей части.

Слѣдовательно людей было большей части $80 + 40 = 120$. Ибо $1200 : 80 = 15$ и $1200 : 120 = 10 + 5 = 15$. Почему $80 \times 15 = 1200$ и $120 \times 10 = 1200$.

8. Найти два числа, которыхъ бы произведенiе было равно 48, а разность ихъ квадратовъ равна 28.

Положивъ, что меньшее число $= x$; то большое будетъ $= \frac{48}{x}$. И такъ

$$\frac{48}{x} \times \frac{48}{x} = \frac{23004}{x^2} \text{ и } \frac{\frac{x}{x}}{x^2}$$
$$\frac{2304}{x^2} - x^2 = 28$$
$$2304 - x^4 = 28x^2$$
$$2304 = 28x^2 + x^4$$
$$x^4 + 28x^2 = 2304$$
$$196 \quad 196. \text{ допол. квадр. изъ } \tfrac{28}{2} = 14$$
$$x^4 + 28x^2 + 196 = 2304 + 196$$
$$\sqrt{x^4 + 28^2 + 196} = 2500$$
$$x^2 + 14 = 50$$

$x^2 = 50 - 14$

$\sqrt{x^2} = 36$

$x = 6$. Меньшое число.

Слѣдовательно большое $= 48 : 6 = 8$.
Ибо $8 \times 6 = 48$, и $8 \times 8 = 64 - 36 = 28$

9. Нѣкто купя коня, продалъ онаго за 56 руб. и по такому прибытку еще на 100 руб. приторговалъ то, что прежде заплатилъ за коня. Спр. сколько денегъ заплатилъ онъ за коня?

Положивъ, что цѣна коня $= x$; то будетъ

$100 : x = x : 56 - x$

$x^2 = 5600 - 100x$

$x^2 + 100x = 5600$

$2500 \quad 2500$. Доп. кв. изъ $\frac{100}{2} = 50$

$x^2 + 100x + 2500 = 5600 + 2500$

$\sqrt{x^2 + 100x + 2500} = 8100$

$x + 50 = 90$

$x = 40$. Цѣна искомая коня.

Ибо $100 : 40 = 40 : 16 = 56 - 40$

10. Найти два числа, которыхъ бы произведенiе было 20, а сумма ихъ кубовъ 189.

Положивъ, что первое число $= x$, второе $\frac{20}{x}$; то будетъ

$\frac{20}{x} \times \frac{20}{x} = \frac{400}{x^2} \times \frac{20}{x} = \frac{8000}{x^3}$ и

$x \times x = x^2 - x = x^3 + \frac{8000}{x^3} = 189$

$x^6 + 8000 = 189x^3$

$x^6 - 189x^3 = -8000$

Дополн. квад. изъ $\frac{189}{2}$ $\underline{8930\frac{1}{4}}$ $\underline{8930\frac{1}{4}}$

$$x^6 - 189x^3 + 8930\tfrac{1}{4} = 8930\tfrac{1}{4} - 8000$$

$$\sqrt{x^6 - 189x^3 + 8930\tfrac{1}{4}} = 930\tfrac{1}{4}$$

$$x^3 - 94\tfrac{1}{2} = 30\tfrac{1}{2}$$

$$x^3 = 125$$

$$\sqrt{x^3} = 125 =$$

$x = 5$. Первое искомое число.

Слѣдовательно второе $20 : 5 = 4$. ибо $5 \times 4 = 20$, и $5 \times 5 \times 5 = 125 + 64 = 189$.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ.

О

Употребленіи сравненій Алгебраическихъ при рѣшеніи задачь, къ пропорціи и прогрессіи какъ Ариѳметической, такъ и Геометрической принадлежащихъ.

ЗАДАЧА XXXIII.

§. 111. Показать количество произведенія двухъ крайнихъ членовъ въ пропорціи Геометрической.

РѢШЕНІЕ.

Первой случай. Когда будутъ даны три члена. На пр. первой $= a$, знаменатель содержанія $= m$; то будетъ слѣдующая пропорція:

$$a,\ ma,\ m^2a$$

$$\begin{array}{cc} ma & a \\ \hline \end{array}$$

$$(ma)^2 = m^2a^2$$

Второй

Второй случай. Когда будутъ даны четыре члена. На пр. первой $= a$, знаменатель содержанія $= m$, третей членъ $= b$; то будетъ слѣдующая пропорція:

$$a : ma = b : mb$$
$$\frac{\quad b \qquad\qquad a}{mab = mab}$$

ПРИБАВЛЕНІЕ

§. 112. Изъ чего выводятся слѣдующія правила: когда въ пропорціи Геометрической даны будутъ три члена; то въ такомъ случаѣ произведеніе двухъ крайникъ членовъ бываетъ равно квадрату средняго члена. (136 Ариѳ.). Когдажъ пропорція Геометрическая будетъ состоять изъ четырехъ членовъ, тогда произведеніе двухъ крайнихъ членовъ бываетъ равно произведенію двухъ среднихъ (§. 135. Ариѳ.).

ЗАДАЧА XXXIV.

§. 113. Въ пропорціи Геометрической непрерывной дано произведеніе изъ квадрата третьяго члена на первой; найти первой членъ.

РѢШЕНІЕ.

Положивъ, что первой членъ $= x$, знаменатель содержанія $= m$, произведеніе изъ крадрата третьяго члена на первой $= a$; то, поелику второй членъ $= xm$, третей $= m^2x$, будетъ

$$a = m^4 x^3$$
$$a : m^4 = x^3$$
$$\sqrt[3]{a : m^4} = x$$

На пр. $a = 648$, $m = 3$; то будетЪ $x = \sqrt[3]{(648 : 81)} = \sqrt[3]{8} = 2$. СлѢдовательно $mx = 6$, $m^2 x = 18$. Ибо $2 . 18 = 6 . 6 = 36$.

ЗАДАЧА. XXXV.

§. 114. ВЪ пропорцiи Геометрической даны сумма перваго и четвертаго члена, сумма втораго и третьяго члена, знаменатель содержанiя; найти первой членЪ.

ПоложивЪ, что перваго и четвертаго члена $= a$, сумма втораго и третьяго члена $= b$, знаменатель содержанiя $= m$, первой членЪ $= x$; то будетЪ второй членЪ $= mx$, третей $= b - mx$, четвертой $= a - x$. И такЪ.

$$x : mx = b - mx : a - x$$
$$ax - x^2 = mbx - m^2 x^2$$
$$a - x = mb - m^2 x$$
$$m^2 x - x = mb - a \quad \text{раздѢлить на} \quad m^2 - 1$$

$$x = \frac{mb - a}{m^2 - 1}$$

На пр. $a = 13$, $b = 11$, $m = 2$; то будетЪ $x \frac{22 - 13}{4 - 1} = \frac{9}{3}$ 3. Первой членЪ. По чему $mx = 6$. И такЪ будутЪ четыре пропорцiональные члена $3 : 6 = 5 : 10$.

ЗАДА-

ЗАДАЧА XXXVI.

§. 115. Въ пропорцiи Геометрической непрерывной даны сумма перваго и третьяго члена: знаменатель содержанiя; найти первой членъ.

РѢШЕНIЕ.

Положивъ, что сумма перваго и третьяго члена $= a$, знаменатель содержанiя $= m$, первой членъ $= x$; то будетъ второй членъ $= mx$, третей $= m^2x$. И такъ.

$$a = m^2x + x$$

$$a : (m^2 + 1) = x$$

На пр. $a = 50$, $m = 2$; то будетъ $x = 50 : (4 + 1) = \frac{50}{5} = 10$ первой членъ $mx = 20$ второй, $m^2x = 40$ третей; слѣдовательно $10 : 20 = 40 : 80$.

ЗАДАЧА XXXVII.

§. 116. Показать, сколькими способами перемѣнены быть могутъ члены Геометрической пропорцiи, не теряя содержанiя между собою.

РѢШЕНIЕ.

Перемѣчяя данные члены пропорцiи Геометрической всякимъ возможнымъ образомъ, и сравнивая суммы и разности ихъ и проч. между собою, тотчасъ можно усмотрѣть, въ какихъ случаяхъ останется

ся

ся пропорція, наблюдая при томъ всегда то только, чтобъ одинъ знаменатель въ обоихъ сравниваемыхъ между собою содержаніяхъ находился. На пр. положивъ слѣдующую пропорцію: $a : ma = b : mb$; то будетъ.

1. $a : b = ma : mb$
2. $ma : a = mb : b$
3. $a + ma : a = b + mb : b$
4. $a + ma : ma = b + mb : mb$
5. $ma - a : a = b - mb : b$
6. $ma - a : ma = b - mb : mb$
7. $a^2 : m^2a^2 = b^2 : m^2b^2$
8. $a : mac = b : mbc$
9. $a : \frac{ma}{c} = b : \frac{mb}{c}$
10. $ac : ma = bc : mb$
11. $\frac{a}{c} : ma = \frac{b}{c} : mb$
12. $ac : mac = b : mb$
13. $\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = b : mb$
14. $ac : mac = bd : mbd$
15. $\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = \frac{b}{d} : \frac{mb}{d}$
16. $ac : mab = bc : mbd$
17. $\frac{a}{c} : \frac{ma}{d} = \frac{b}{c} : \frac{mb}{d}$

18. $a : mna = b : mnb$

19. $a : mna = \frac{b}{n} : mb.$

ПРИМѢЧАНІЕ 1.

§. 117. Во всѢхЪ сихЪ пропорціяхЪ знаменители содержаній сЪ обѢихЪ сторонЪ равны между собою. На пр. вЪ пропорціи $a + ma - a = b + mb : b$ знаменатель перваго содержанія $a + ma : a$ есть $1 + m$, и во второмЪ содержаніи $b + mb : b$ есть такойже $1 + m$.

ПРИМѢЧАНІЕ 2.

§. 118. Каждая изЪ показанныхЪ 19. пропорцій предлагаетЪ особливое правило: На пр. пропорція подЪ No: 1. положенная $a : ma = b : m$ показываетЪ, что когда четыре количества будутЪ пропорціональны между собою; то тогда первой членЪ сордежится кЪ второму, такЪ какЪ третей кЪ четвертому. РавнымЪ образомЪ пропорція, подЪ No: 12. положенная $ac : mac = b : mb$, изЪявляетЪ, что, когда вЪ пропорціи Геометрической первой и второй члены будутЪ умножены на одно, по изволенію взятое число, и вЪ такомЪ случаѢ члены оной будутЪ пропорціональны между собою.

ЗАДА-

ЗАДАЧА XXXVIII.

§. 119. Показать, какимъ образомъ перемѣнены быть могутъ два количества, нетеряя прежняго содержанія между собою.

РѢШЕНІЕ.

Положивъ, что тѣ количества суть a и ma, которыя содержатся между собою, какъ 1 : m; то будетъ

I.

$$\begin{array}{l} a : ma \\ c \quad c \\ \hline ac : mac = a : ma \\ \qquad = 1 : ma \end{array}$$

II.

$$\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = 1 : ma$$
$$= 1 : m$$

III.

$$\begin{array}{l} a : mu \\ b : mb \\ \hline a - b : ma - mb = a : ma \\ \qquad = b : mb \\ \qquad = 1 : m \end{array}$$

IV.

$$\begin{array}{l} a : ma \\ b \quad mb \\ \hline a + b : ma + mb = a : ma \\ \qquad = b : mb \\ \qquad = 1 : m \end{array}$$

ПРИМѢЧАНІЕ

§. 120. Изъ показанныхъ четырехъ перемѣнъ, учиненныхъ въ разсужденіи двухъ количествъ, выводятся четыре слѣдующія правила:

1. Когда два количества будутъ умножены на одно третіе, по изволенію взятое число; то произшедшія изъ того произ-

произведенія содержатся между собою, какъ умноженныя тѣ количества.

2. Когда два количества будутъ раздѣлены на одно третіе, по изволенію взятое число; то произшедшія изъ того частныя числа содержатся между собою, какъ тѣ раздѣленныя количества.

3. Когда отнятыя части содержатся между собою, какъ цѣлыя количества; то и оставшіяся части будутъ содержаться между собою, какъ цѣлыя количества.

4. Когда приданныя количества содержатся между собою, какъ тѣ, къ коимъ оныя приданы; то и суммы, изъ того произшедшія, будутъ имѣть такоежъ содержаніе между собою.

ЗАДАЧА XXXIX.

§. 121. Въ прогрессіи Ариѳметической даны первой членъ, послѣдней членъ и разность членовъ; найти число членовъ и сумму оныхъ.

РѢШЕНІЕ.

Положивъ, что первой членъ $= a$, послѣдней членъ $= b$, разность членовъ $= d$, число членовъ $= x$, сумма оныхъ $= y$; то будетъ

$$x - 1$$
$$d$$

$$y = \frac{b+a}{2} \times x \text{ (§. 185. Ариѳ.)}$$

$$b = dx - d + a \text{ (§. 178. Ариѳ)}$$

$$b - a + d = dx$$

$$x = \frac{b-a}{d} + 1$$

$$y = \frac{b+a}{2} \times \overline{\frac{b-a}{d} + 1}$$

$$y = \frac{b^2 - a^2 + ad + bd}{2d}$$

$$y = \frac{b^2 - a^2}{2d} + \frac{a+b}{2}.$$

На пр. $a = 2$, $b = 17$, $d = 3$; то будетъ $x = (17 - 2) : 3 = 5 + 1 = 6$; $y = 17 \times 17 = 289 - (2 \times 2) = 285 : 6 = 47\frac{1}{2} + (17 + 2 : 2) = 57$.

ЗАДАЧА XL.

§. 122. Въ прогрессіи Ариѳметической даны первой членъ, разность членовъ и сумма всѣхъ оныхъ; найти число членовъ и послѣдней членъ.

РѢШЕНІЕ.

Положивъ, что первой членъ $= a$; разность членовъ $= d$, сумма всѣхъ членовъ $= c$, число членовъ $= x$, послѣдней членъ $= y$; то будетъ.

$$c = \tfrac{x}{2}(a + y) \qquad a + dx - d = y$$

$$2c = ax + xy$$

$$2c - ax = xy$$

$$\frac{2c - ax}{x} = y$$

$$\frac{2c - ax}{x} = a + dx - d$$

$$2c - ax = ax + dx^2 - dx$$

$$2c = dx^2 + ax - dx + ax$$

$$2c = dx^2 + 2ax - dx$$

$$\frac{2c}{d} = x^2 + \frac{(2ax - dx)}{d} - \frac{2a - d}{d} = m$$

$$\frac{2c}{d} = x^2 + \frac{(2a - d)}{d} x$$

$$\frac{2c}{d} = x^2 + mx$$

$$\sqrt{\frac{2c}{d} + \frac{1}{4}m^2} = x^2 + mx + \frac{1}{4} m^2$$

$$\frac{2c}{d} + \frac{1}{4} m^2 = x + \frac{1}{2} m$$

$$\left(\frac{2c}{d} + \frac{1}{4} m^2\right) - \frac{1}{2} m = x$$

$$x = \left(\frac{4a^2 + 4ad^2}{4d} + d^2 - \frac{2c}{d}\right) - \frac{2a \div d}{2d}$$

На пр. $a = 2$, $d = 3$, $c = 57$; то будетъ

$m = \frac{4 - 3}{3} = \frac{1}{3}$; $x = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9} : \frac{1}{4} = \frac{1}{36} + 38$
$= \sqrt{\frac{1369}{36}} = \frac{37}{6} - \frac{1}{6} = \frac{36}{6} = 6$; $y = 3 \times 6 = 18$
$+ 2 = 20 - 3 = 17$.

ЗАДАЧА. XLI.

§. 123. Въ прогрессiи Ариѳмитической даны первой членъ, послѣднiй членъ, сум-

ма всѣхъ членовъ; найти число членовъ и разность оныхъ.

РѢШЕНІЕ.

Положивъ, что первой членъ $= a$, послѣдней $= b$, сумма всѣхъ членовъ $= c$, число членовъ $= x$, разность оныхъ $= y$; то будетъ

$$\frac{x}{2}(a + b) = c \qquad a + xy - y = b$$

$$xy - y = b - a$$

$$x(a + b) = 2c \qquad xy = b + y - a$$

$$x = \frac{2c}{a+b} \qquad x = \frac{b + y - a}{y}$$

$$\frac{2c}{a + b} = \frac{b + y - a}{y}$$

$$\frac{2cy}{a + b} = b + y - a$$

$$2cy - ab + ay - a^2 + b^2 + by - ab$$

$$2cy = ay - a^2 + b^2 + by$$

$$2cy - ay - by = b^2 - a^2$$

$$y = \frac{b^2 - a^2}{2c - ac - b}$$

На пр. $a = 2$, $b = 17$, $c = 57$; то будетъ $x = 57 \times 2 = \frac{114}{2+17} = 6$, $y = 17 \times 17 = 289 + (2 \times 2 = 4) = \frac{285}{114 - 2 - 17} = 3.$

ЗАДА-

ЗАДАЧА XLII.

§. 124. ВЪ прогрессіи Ариѳметической даны разность членовЪ, сумма оныхЪ, и одинЪ членЪ изЪ прогрессіи; найти первой и послѣдней члены.

РѢШЕНІЕ.

ПоложивЪ, что разность членовЪ = d, сумма оныхЪ = c, данной изЪ прогрессіи членЪ = n, первой членЪ = x, а послѣдней = y; то будетЪ

$$\frac{1}{2} n(x + y) = c \qquad y = x + nd - d$$

$$n(x + y) = 2c$$

$$x + y = \frac{2c}{n}$$

$$y = \frac{2c}{n - x}$$

$$\frac{2c}{n - x} = x + nd - d$$

$$2c : n - x = x + nd - d$$

$$2c : n = 2x + nd - d$$

$$2c : n + d = 2x + nd$$

$$2c : n + d - nd = 2x$$

$$\frac{2c}{n} + (d - nd) = 2x$$

$$\frac{c}{n} + \frac{(d - nd)}{2} = x$$

На пр. $d = 3$, $c = 57$, $n = 6$; то будетЪ $x = \frac{57}{6} + 3 = \frac{57}{6} + \frac{18}{2} - \frac{18}{2} = \frac{57}{6}$ +

$+ 9 = \frac{60}{6} + = 11 - 9 = 2$; $y = 2 + 18 = 20 - 3 = 17$.

ЗАДАЧА XLIII.

§. 125. ВЪ прогрессіи Ариѳметической даны послѣдней членъ, разность членовъ, сумма оныхъ; найти первой членъ и число членовъ.

РѢШЕНІЕ.

Положивъ; что послѣдней членъ $= b$, разность членовъ $= d$, сумма оныхъ $= c$, первой членъ $= x$, число членовъ $= y$; то будетъ

$$\frac{y}{2}(x + b) = c$$
$$y(x + b) = 2c$$
$$x + b = \frac{2c}{y}$$
$$x = \frac{2c}{y} - b$$

$$b = x + dy - d$$
$$b + d = x + dy$$
$$b + d - dy = x$$

$$\frac{2c}{y} - b = b + d - dy$$
$$2c - by = by + dy - dy^2$$
$$2c - by + dy^2 = by + dy$$
$$2c + dy^2 = 2by + dy$$
$$dy^3 = 2by + dy - 2c$$
$$dy^2 - 2by - dy = 2c$$
$$y^2 - \frac{(2b - d)}{d}\, y = -\frac{2c}{d}$$

$$\frac{2b - d}{d} = m$$

y^2

$$y^2 - my = -\frac{2c}{d}$$

$$y^2 - my + \tfrac{1}{4} m^2 = \tfrac{1}{4} m^2 - \frac{2c}{d}$$

$\tfrac{1}{2} m - y$, или $y \tfrac{1}{2} m = \sqrt{(\tfrac{1}{4} m^2 - \frac{2c}{d})}$

$$y = \tfrac{1}{2} m \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4} m^2 - \frac{2c}{d})}.$$

Или, $y = 2b + d \pm \sqrt{(\frac{4b^2 + 4bd + d^2}{4d^2} - \frac{2c}{d})}$

$$= 2 + d \pm \sqrt{(4b^2 + 4bd + \frac{d^2 - 8cd}{2d}}$$

Слѣдовательно $x = b + d - b - \tfrac{1}{2} d \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{(4b^2 + 4bd + d^2 - 8cd)} = \tfrac{1}{2} d \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{(4b^2 + 4bd + d^2 - 8cd)}$. Но какъ $(4b^2 + 4bd + d^2) = (2b + d)^2$; то положивъ, что $b = 17$, $d = 3$, $c = 57$, будетъ $2b + d = 34 + 3 = 37$. И потому $y = 37 - \sqrt{(1369 - 1368)} = \frac{37 - 1}{6} = \frac{36}{6} = 6$; $x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

ЗАДАЧА XLIV.

§. 126. Въ погрессіи Ариѳметической даны сумма всѣхъ членовъ, число оныхъ и произведеніе изъ перваго члена на послѣдней; найти первой и послѣдней члены.

РѢШЕНІЕ.

Положивъ, что сумма всѣхъ членовъ $= c$, число оныхъ $= n$, произведеніе изъ перваго члена на послѣдней $= a$, первой членъ $= x$, послѣдней $= y$; то будетъ

$$\tfrac{1}{2}\, n(x + y) = c \qquad a = xy$$
$$n(x + y) = 2c \qquad \frac{a}{x} = y$$
$$x + y = \frac{2c}{n}$$
$$y = \frac{2c}{n} - x$$
$$\frac{a}{x} = \frac{2c}{n} - x$$
$$a = \frac{2cx}{n} - x^2$$
$$x^2 = \frac{2cx}{n} = - a$$
$$x^2 - \frac{2cx}{n} + \frac{c^2}{n^2} = \frac{c^2}{n^2} - a$$
$$\frac{c}{n} \pm x = \sqrt{\left(\frac{c^2}{n^2} - a\right)}$$
$$\frac{c}{n} \pm \sqrt{\left(\frac{c^2}{n^2} - a\right)} = x$$

То есть, принимая знакъ —, найдется x, принимаяжъ знакъ $+$, найдется y. На пр. $c = 57$, $n = 6$, $a = 34$; то будетъ $x = \frac{57}{6} - \sqrt{\left(\frac{3249}{36} - 34\right)}$ $\frac{57}{6} - \sqrt{\left(\frac{3249 - 1224}{36}\right)} = \frac{57}{6} - \sqrt{\frac{2025}{36}} = \frac{57}{6} - \frac{45}{6} = \frac{12}{6} = 2$; $y = \frac{57 + 45}{6} = \frac{102}{6} = 7$.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XXII.

§ 127. Сумма нѣсколькихъ членовъ, состоящихъ въ прогрессіи Ариѳметической, начи-

начинающейся съ единицы, называется *полигональное число* (numerus Polygomus); въ особливостижъ именуется *треугольное* (numerus triangularis), когда разность членовъ въ прогрессіи Ариөметической будетъ 1; *квадратное*, или, *тетрагональное* (numerus quadratus), когда разность будетъ 2; *пентагональное* (pentagonus), когда разность будетъ 3; *эксагональное* (hexagonus), когда разность будетъ 4, и такъ далѣе. На пр.

Ариө. прогрессіи: 1. 2. 3, 4, 5, 6, 7, 8.
Треугол. число 1. 3. 6. 10. 15. 21. 28. 36.
Ариө. прогр. 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15.
Квадр. число. 1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64
Ариө. прогр. 1. 4. 7. 10. 13. 16. 19. 22.
Пентаг. число. 1. 5. 12. 22. 35. 51. 70. 92.
Ариө. прогр. 1. 5. 9. 13. 17. 21. 25. 29.
Эксагон. число 1. 6. 15. 28. 45. 66. 91. 120.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XXIII.

§. 128. *Бокомъ* (latus) полигональнаго числа называется число тѣхъ членовъ прогрессіи Ариөметической, которые складываются и составляютъ полигональное число.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XXIV.

§. 129. *Числомъ угловъ* (numerus angulorum) называется число показывающее, сколько угловъ та фигура имѣетъ, отъ кото-

рой полигональное число получаетъ свое названіе.

ПРИБАВЛЕНІЕ 1.

§. 130. Такимъ образомъ число угловъ въ треугольныхъ есть 3, въ квадратныхъ 4, въ пентагональныхъ 5. и проч.

ПРИБАВЛЕНІЕ 2.

§. 131. По елику разность членовъ въ треугольномъ числѣ есть 1. въ квадратномъ 3. и проч. то число угловъ всегда бываетъ числомъ 2 больше разности членовъ той прогрессіи, изъ сложенія которой полигональныя числа происходятъ.

ЗАДАЧА XLV.

§. 132. Показать, чему равняется произведеніе двухъ крайнихъ членовъ въ прогрессіи Геометрической.

РѢШЕНІЕ.

Положивъ, что первой членъ прогрессіи = a, знаменатаь содержанія = m; то будетъ слѣдующая прогрессія:

$$a, ma, m^2a, m^3a, m^4a, m^5a, m^6a$$

$$\begin{array}{ccccccc} m^5a & & m^3a & m^2a & & a \\ \hline m^6a & = & m^6a & = m^6a & = & m^6a \end{array}$$

Изъ самаго рѣшенія явствуетъ, что въ прогрессіи Геометрической произведеніе двухъ крайнихъ членовъ равняется произ-

номъ

веденію другихъ двухъ членовъ, въ равномъ разстояніи находящихся отъ оныхъ, а среднему, безъ сравненія съ другимъ остающемуся, самому на себя умноженному.

ПРИБАВЛЕНІЕ 1.

§. 133. И такъ въ прогрессіи геометрической послѣдней членъ равняется произведенію, произшедшему изъ умноженія перваго члена на знаменатель содержанія, возвышеннаго въ степень единицею меньше противъ числа членовъ. На пр.

Положивъ, что первой членъ $= a$, знаменитель содержанія $= m$, число членовъ $= n$, послѣдней членъ $= x$; то будетъ $x = m^{n-1} a$. То есть, естьли $a = 1$, $m = 2$, $n = 8$; то будетъ $x = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 128 \times 1 = 128$.

ПРИБАВЛЕНІЕ 2.

§. 134. Изъ чего явствуетъ, что естьли разность крайнихъ членовъ въ прогрессіи Геометрической раздѣлится на знаменателя, единецею уменьщеннаго, и къ тому приложится послѣдней членъ; то произойдетъ изъ того сумма всѣхъ членовъ. На пр положивъ, что первой членъ $= a$, знаменатель содержанія $= m$, число членовъ $= n$; то будетъ послѣдней членъ $m^{n-1}a$ (§. 133). Слѣдовательно сумма всѣхъ

 чле-

членовъ $= \frac{m^{n-1} a - a}{m - 1} † m^{n-1} a$. То есть, ежели $a = 1$, $m = 2$, $n = 8$; то будетъ $128 - 1 : (2 - 1) = 127 † 1 = 128$ сумма всѣхъ членовъ.

ЗАДАЧА XLVI.

§. 135. Въ прогрессіи Геометрической даны первой и послѣдней члены також число оныхъ; найти знаменатель содержанія.

РѢШЕНІЕ.

Положивъ, что первой членъ $= a$, послѣдней членъ $= b$, число членовъ $= n$, знаменатель содержанія $= x$; то будетъ

$$b = x^{n-1} a$$

$$\frac{b}{a} = x^{n-1}$$

$$b^{1:n-1} : a^{1:(n-1)} = x$$

То есть, ежели $a = 2$, $b = 486$, $n = 6$; то будетъ $x = \sqrt[5]{} (486 : \sqrt[5]{2}) = \sqrt[5]{234} = 3$. Или $6 : 2 = 3$.

ЗАДАЧА. XLVII.

§. 136. Въ прогрессіи Геометрической даны знаменатель содержанія, число членовъ, сумма оныхъ; найти первой членъ.

РѢШЕ-

РѢШЕНІЕ

Положивъ, что знаменатель содержанія $= m$, число членовъ $= n$, сумма всѣхъ членовъ $= c$, первой членъ $= x$; то будетъ послѣдней членъ $= m^{n-1}x$. И такъ.

$$c = (m^{n-1}x - x) : m - 1 + m^{n-1}x$$

$$mc - c = m^{n-1}x - x$$

$$(mc - c) : (m - 1) = x = (m - 1)c : m - 1$$

То есть, ежели $m = 3$, $n = 6$, $c = 728$; то будетъ $x = 2 \times 728 : 728 = 2$. Ибо $(486 - 2) : 2 + 486 = 243 - 1 + 486 = 242 + 486 = 728$.

ПРИБАВЛЕНІЕ.

§. 137. Поелику изъ сравненія $mc - c = m^{n-1}x - x$, можно вывести такую пропорцію: $c : x = m^{n} - 1 : m - 1$; то происходитъ изъ сего слѣдующее правило: сумма членовъ въ прогрессіи Геометрической къ первому оной члену содержится, какъ степень знаменателя содержанія, коей указатель равенъ числу членовъ, уменьшенная единицею, къ самому знаменателю, единицеюжъ уменьшенному.

ЗАДА-

ЗАДАЧА XLVIII.

§. 138. Въ прогрессіи Геометрической даны первой и послѣдней члены, такожъ знаменатель содержанія; найти число членовъ.

РѢШЕНІЕ.

Положивъ, что первой членъ = a, послѣдней членъ = b, знаменатель содержанія = n, число членовъ = x; то будетъ

$$b = m^{n-1} a$$

Вмѣстожъ a принявъ логариѳмъ его = al, и вмѣсто m также принявъ логариѳмъ его = lm; то будетъ

$$xlm - lm + la = lb \text{ (§. 290 и 288. Ариѳ.)}$$

$$xlm = lb - la + lm$$

$$x = (lb - la) : lm + 1$$

То есть, ежели a = 2, b = 486, m = 3; то будетъ

$$lb = 2.6866363$$

$$la = 0.3010300$$

$$lb - la = 2.3856063$$

$$lm = 0.4771212$$

$\left\{ \begin{matrix} 5 \\ 1 \end{matrix} \right.$

6 = x. Число член.

ЗАДАЧА XLIX.

§. 139. Въ прогрессіи Геометрической даны произведеніе изъ перваго члена на послѣдней, число членовъ и знаменатель содер-

содержанія; найти первой и послѣдней члены.

РѢШЕНІЕ.

Положивъ, что произведеніе изъ перваго члена на послѣдней $= f$, число членовъ $= n$, знаменатель содержанія $= m$, первой членъ $= x$, послѣдней $= y$; то будетъ

$$xy = f \qquad m^{n-1} x = y$$

$$y = f : x$$

$$f : x = m^{n-1} x$$

$$f = m^{n-1} x^2$$

$$f : m^{n-1} = x^2$$

$$x = \sqrt{f} : \sqrt{m^{n-1}}$$

То есть, ежели $m = 3$, $n = 6$, $f = 972$; то будетъ $x = \sqrt{972} : \sqrt{243} = \sqrt{4} = 2$.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XXV.

§. 140. Три, или четыре количества *гармонически пропорціональныя* (quantitates harmonice proportionales) называются, когда въ первомъ случаѣ разность перваго и втораго члена къ разности втораго и третьяго содержанія такъ, какъ первой къ третьему; а во второмъ случаѣ, когда разность перваго и втораго члена къ разности

ности третьяго и четвертаго содержится такЪ, какЪ первой кЪ четвертому. На пр. Гармонически пропорціональныя будутЪ три слѣдующія числа: 2. 3. 6. Ибо разность перваго и втораго = 1. содержится какЪ 1 : 3 = 2 : 6

ПРИБАВЛЕНІЕ.

§. 141. Пропорціональные члены, по первому случаю продолжающіеся, составляютЪ *Гармоническую прогрессію* (Harmonicam progressionem).

ЗАДАЧА L.

§. 142. Найти третіе Гармонически пропорціональное число кЪ двумЪ даннымЪ числамЪ.

РѢШЕНІЕ.

ПоложивЪ, что первое число = a, второе = b, третье = x; то будетЪ

$$a - b : b - x = a : x \quad (§. 139.)$$
$$ax - bx = ab - ax$$
$$2ax - bx = ab$$
$$x = \frac{ab}{2a - b}$$

На пр. a = 10, b = 16; то будетЪ x = 16 × 10 : (10 × 2 − 16) = 40. Ибо 10 − 16 : 16 − 40 = 10 : 40, или 6 : 24 = 10 : 40

ЗАДА-

ЗАДАЧА LI.

§. 143. Найти среднее Гармонически пропорціональное число между двумя данными числами.

РѢШЕНІЕ.

Положивъ, что первое число $= a$, второе $= b$, среднее $= x$; то будетъ

$$a - x : x - b = a : b \text{ (§. 139.)}$$
$$ab - bx = ab - ax$$
$$2ab - bx = ax$$
$$2ab = ax + bx$$
$$\frac{2ab}{a + b} = x$$

На пр. $a = 10$, $b = 40$; то будетъ $x = 10 \times 2 \times 40 : (10 + 40) = 16$.

ЗАДАЧА. LII.

§. 144. Найти четвертое Гармонически пропорціональное число къ тремъ даннымъ числамъ.

РѢШЕНІЕ.

Положивъ, что первое число $= a$, второе $= b$, третіе $= c$, четвертое $= x$; то будетъ

$$a - b : c - x = a : x \text{ (§. 139)}$$
$$ax - bx = ac - ax$$
$$2ax - bx = ac$$
$$x = \frac{ac}{2a - b}$$

На пр. a = 6, b = 8, c = 12; то будетъ $x = 6 \times 12 : (6 \times 2 - 8) = 18$.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

о

Употребленіи сравненій Алгебраическихъ при рѣшеніи Геометрическихъ задачъ.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XXVI.

§. 145. *Конструкціею Геометрического* (constructio Geometrica) называется такое искусство, помощію котораго члены Алгебраическихъ сравненій изображаются линеями.

ПРИБАВЛЕНІЕ.

§. 146. Поелику въ сей практикѣ вмѣсто Алгебраическихъ знаковъ поставляются линеи; то должно смотрѣть на взаимное отношоніе количествѣ, содержащихся въ сравненіи, и стараться о томъ, чтобъ, по надлежащемъ соединеніи Ариѳметическихъ и Геометрическихъ испиннъ, тоже было сравненіе. Что всего яснѣе можно понять изъ приложенныхъ при семъ разныхъ примѣровъ.

ЗАДАЧА LIII.

§. 147. Рѣшить алгебраическимъ образомъ Геометрическую задачу.

РѢШЕНІЕ

Что при рѣшеніи ариѳметическихъ задачъ чрезъ сравненія наблюдать предписано, все то самое и здѣсь наблюдать должно. И какъ весьма рѣдко при рѣшеніи геометрическихъ задачь доходить можно до такогожъ сравненія, какое для рѣшенія ариѳметическихъ задачъ употребляется; то сверьхъ того здѣсь примѣчать надлежитъ въ особливости слѣдующее:

1. Все то, что для рѣшенія предлагается, должно представлять уже рѣшенымъ, или сдѣланнымъ.

2. Должно изыскивать взаимныя отношенія всѣхъ линей, въ фигурѣ изображенныхъ, не дѣлая притомъ никакого различенія между извѣстными и неизвѣстными, чтобъ видно было, какимъ образомъ однѣ линеи отъ другихъ зависятъ, то есть, какимъ образомъ чрезъ однѣ данныя линеи находятся купно и другія или чрезъ подобные треугольники, или чрезъ прямоугольники, или чрезъ другія Теоремы.

3. Чтобъ имѣть подобные треугольники и прямоугольники; то часто надобно продолжать линеи до тѣхъ поръ, пока онѣ прямо, или не прямо сдѣлаются равныя даннымъ, или оныя пересѣкутъ; часто надобно проводить параллельныя и

 пер-

перпендикулярныя линеи; часто надобно соединять нѣкоторыя точки, и наконецъ часто надобно дѣлать углы равные даннымъ. И какъ все сіе почерпается изъ Геометріи; то на сей конецъ надлежитъ твердо содержать въ памяти Теоремы о равенствѣ угловъ и подобіи треугольниковъ.

4. Ежели иойдено будетъ до такого сравненія, которое не согласно съ содержаніемъ задачи; то въ такомъ случаѣ должно другимъ образомъ изыскивать взаимныя отношенія линей. Иногдажъ находится и не прямо искомая линея, но другая, чрезъ которую и самая данная извѣстна бываетъ.

5. По учиненіи приведенія сравненія, должно выводить Геометрическую конструкцію разными образами, смотря по различію сравненій.

ПРИМѢЧАНІЕ.

§. 148. Поелику здѣсь одни токмо простѣйшіе Алгебраическіе случаи примѣрами Геометрическими объяснены быть имѣютъ; то довольно показать, какимъ образомъ составляются простыя и квадратическія сравненія.

ЗАДАЧА LIV.

§. 149. Составить простыя сравненія.

РѢШЕ-

РѢШЕНІЕ.

Все искусство состоитъ въ томъ, чтобъ дроби, коимъ неизвѣстное число равно, приведены были въ пропорціональные члены. Что самое гораздо лучше примѣрами, нежели правилами, показать можно. И такъ

1. Сравненіе $x = a$ показываетъ, что данной линеѣ a равна неизвѣстная x.

2. $x = a + b$, или $x = a - b$ показываетъ, что неизвѣстная линея x равна суммѣ, или разности двухъ извѣстныхъ линей.

3. $x = \frac{a}{b}$ показываетъ, что неизвѣстная линея x изображаетъ содержаніе двухъ данныхъ линей, то есть, неизвѣстная линея x имѣетъ такое содержаніе, какое имѣютъ между собою двѣ данныя a и b.

4. $x = \frac{ab}{c}$ изображаетъ слѣдующую пропорцію: $c : a = b : x$, то есть, показываетъ, что неизвѣстная линея x есть четвертая пропорціональная къ тремъ даннымъ a, b, c.

5. $x = \frac{ac+bc}{d+b}$ изображаетъ слѣдующую пропорцію: $d + b : c = a + b : x$.

ЗАДАЧА. LV.

§. 150. Составить квадратическія сравненія.

РѢШЕНІЕ.

1. $x^2 = ab$, или, $a : x = x : b$, показываетъ, что неизвѣстная линея x есть средняя пропорціональная между двумя данными a и b.

2. Сравненіе $x^2 = ab + cd$, или $x = \sqrt{(ab + cd)}$ показываетъ, что между a и b, такожъ между c и d должно найти среднія пропорціональныя линеи, то есть, $a : m = m : b$ и $c : n = n : d$; почему будетъ $x = \sqrt{(m^2 + n^2)}$. Такого сравненія конструкцію показываетъ Пиѳагорова Теорема; то есть, сдѣлай прямоугольной треугольникъ изъ линей m и n, то ипотенуза будетъ $\sqrt{(m^2 + n^2)}$ (§. 372. Геом).

3. $x^2 \frac{a^2bc}{mn}$, вмѣсто a^2 возми mr; ибо $m : a = a : r$; то будетъ $x^2 = \frac{mrbc}{mn}$, или, $x = \frac{rbc}{n}$; вмѣстожъ rb поставь ns; ибо $n : r = b : s$; то будетъ $x^2 = \frac{nsc}{n}$, или, $x^1 = sc$; то есть, неизвѣстная линея x есть средняя пропорціональная между s и c.

4 $x^2 = ax + b^2$, или $x^2 - ax = b^2$, или $x^2 - ax + \frac{1}{4} a^2 = b^2 + \frac{1}{4} a^2$, или, $x = \sqrt{(b^2}$

$\sqrt{}(b^2 + \frac{1}{4} a^2) \frac{1}{4}$ a. Изъ сего сравненія явствуетъ, что неизвѣстная линея x будетъ извѣстна, когда изъ $b^2 + \frac{1}{4} a^2$ извлечется квадратной радиксъ, которой находится чрезъ Пиѳагорову Теорему, и потомъ къ оному радиксу приложится $\frac{1}{2}$ a; то есть, ежели надобно будетъ составить радиксъ изъ $b^2 + \frac{1}{4} a^2$; то на половинѣ a, такъ какъ на поперешникѣ, описывается полкруга, и на оной переносится AB $=$ b; по учиненіи сего бокъ BC будетъ искомой радиксъ (§. 372. Геом.). ф. 1.

ТЕОРЕМА IV.

§. 151. Ежели изъ какой нибудь поперешника точки, на пр. P, возставится перпендикулярная линея PR, простирающаяся до самой окружности круга, то она ф. 2. будетъ средняя пропррціональная между отрѣзками поперешника AP и PB.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Положимъ, что полупоперешники AC, CR и CB $=$ r, CP $=$ x, PR $=$ y; то будетъ AP $=$ r $+$ x и PB $=$ r $-$ x; и такъ остается только доказать, что r $+$ x : y $=$ y : r $-$ x. Но какъ въ пропорціи Геометрической произведеніе крайнихъ членовъ равняется произведенію двухъ среднихъ (§. 135. Ариѳ.), или среднему, самому на себя умноженному (§. 136. Ариѳ.), то есть,

$\overset{2}{r} - x^2 = y^2$; слѣдовательно между двумя прямыми линеями AP и PB найдется средняя пропорціональная линея PR, естьли двѣ прямыя линеи соединятся въ одну, которую потомъ въ точкѣ C должно раздѣлить на двѣ равныя части, и изъ той точки, какъ изъ центра, описавъ полкруга, изъ P до самой окружности провести перпендикулярную линею. ч. н. д.

ПРИБАВЛЕНІЕ.

§. 152. Изъ чего явствуетъ, что естьли прямоугольнаго треугольника ABR ипотенуза AB въ точкѣ C раздѣлится на двѣ равныя части; то прямая линея CR будетъ равна CB, такъ что всегда половинная
ф. 2. часть ипотенузы однимъ своимъ концомъ, какъ полупоперешникъ, проходитъ чрезъ верьхъ прямаго угла; и потому всякой прямоугольной треугольникъ заключается въ полукружіи. Ибо изъ точки R на ипотенузу AB опустивъ перпендикулярную линею RP, будешь имѣть слѣдующую пропорцію: AP : PR = PR : PB : (§. 267 и 268). Положимъ, что CB, или AC $= r$, CR $= b$, CP $= x$, PR $= y$ и PB $= r - x$; то будетъ $r + x : y = : r - x$, то есть, $r^2 - x^2 = y^2$, также $b^2 - x^2 = y^2$, и потому $r^2 - x^2 = b^2 - x$, или $r^2 = b^2$, или $r = b$.

ЗАДА-

ЗАДАЧА LVI.

§. 153. Данъ полупоперешникъ круга ED, найти бокъ AB правильнаго, то есть, равносторонняго треугольника, которой въ томъ кругѣ начерченъ быть можетъ. ф. 3.

РѢШЕНІЕ.

Положивъ, что DB бокъ шестіугольника; то, поелику DB = BE (§. 295. Геом.), также при F находятся углы прямые (§. 187. Геом.), будетъ DF = EF (§. 186. Геом.). И такъ, положивъ DB = a, BA = x, будетъ DF = $\frac{1}{2}$ a, BF = $\frac{1}{2}$ x; слѣдовательно

$$\frac{3}{4}a^2 = \frac{1}{4}x^2$$

$$3a^2 = x^2$$

$$\sqrt{3a^2} = x$$

То есть, найдется x, когда между 3a и a сыщешь среднюю пропорціональную линею (§. 267. Геом.).

ПРИМѢЧАНІЕ.

§. 154. Желаемой бокъ описываемаго въ кругѣ равносторонняго треугольника способнѣе можно сыскать слѣдующимъ образомъ: изъ A и B поперешникомъ AB сдѣлай разрѣзъ въ D, и изъ центра C проведи прямую линею CD, которая будетъ искомой бокъ треугольника. Ибо, поелику $DB^2 = 4a^2$, $CB^2 = a^2$, будетъ $CD^2 = 3a^2$ (§. 374. Геом.); слѣдовательно $CD = \sqrt{3a^2}$. Или, сдѣлай AE = a; то, по причинѣ прямаго ф. 4.

угла при E (§. 260. Геом.), будетъ EB = V 3a² (§. 374. Геом.).

ПРИБАВЛЕНІЕ 1.

§. 155. поелику $3a^2 = x^2$ (§. 143.);
ф. 3. то $a^2 : x^2 = 1 : 3$, то есть, $DE^2 : AB^2 = 1 : 3$.

ПРИБАВЛЕНІЕ 2.

§. 156. Естьли будетъ данъ бокъ треугольника, на пр. AB = b, и надобно будетъ найти полупоперешникъ круга, на
ф. 3. пр. DE = y, которымъ около того треугольника описанъ кругъ; то будетъ $3y^2 = b^2$ (§. 145.), или $y = V \frac{1}{3} b^2$, то есть, въ такомъ случаѣ надлежитъ только между линеею AB и третьею частью оной сыскать среднюю пропорціональную линею (§. 267. Геом.).

ЗАДАЧА LVII.

§. 157. Въ прямоугольномъ треуголь-
ф. 5. никѣ ABC дана сумма всѣхъ боковъ и плоскость онаго; найти ипотенузу AC.

РѢШЕНІЕ.

Положивъ, что AB † BC † CA = a, AC = x, плоскость = b^2; то будетъ AB † BC = a — x. Но какъ $AC^2 = AB^2 † BC^2$ (§. 372. Геом.), и $AB^2 † BC^2 = (AB † BC^2)$, — 2AB. BC (§. 259. Ариѳ.)); то будетъ $AC^2 = (AB = † BC^2) — 2$ AB. BC (§. 32. Ариѳ.). По положеніюжъ $AC^2 = x^2$; (AB † BC²)

$\dagger BC^2) = a^2 - 2ax \dagger x^2$, $2AB.\ BC = 4b^2$; почему

$$x^2 = a^2 - 2ax \dagger x^2 - 4b^2$$
$$2ax = a^2 - 4b^2$$
$$x = \frac{1}{2}a - \frac{2b^2}{a}$$

И такъ, естьли въ силу произшедшаго сревненія, надобно будетъ составить треугольникъ; то высоту BD, то есть, перпендикулъ на ипотезуну AC опущенной назови y, и будетъ

$$\frac{1}{2}xy = b^2 \text{ (§. 338. Геом.)}$$
$$y = \frac{b^2}{\frac{1}{2}x}$$

То есть, въ концѣ линеи BD $= a$ возставь перпендикулярную линею AB $= 2b$, и сдѣлавъ BG $= b$, найди четвертую пропорціональную линею BH $= 2b^2 : a$; потомъ сдѣлай CB $= \frac{1}{2}a$ и CI $=$ BH; то будетъ BI $= \frac{1}{2}a - 2b^2 : a = x$. Раздѣ- ф. 6.
ливъже BI на двѣ равныя части въ точкѣ O. найди къ BO $= \frac{1}{2}x$ и BE $=$ BG $= b$ третью пропорціональную линею BK, которая будетъ искомая высота треугольника $= b^2 : \frac{1}{2}x$. Почему, естьли на линеѣ BI опишешь полкруга и чрезъ точку K означишь съ оною перпендикулярную линею KL, пересѣкающую полкруга въ точкѣ L, и

 по-

потомъ проведешь прямыя линеи BL и LI, произойдетъ желаемой треугольникъ BLI.

ЗАДАЧА LVIII.

§. 158. Начертить ромбъ AEFD въ пря-
ф. 7. моугольномъ четвероугольникѣ ABCD,

РѢШЕНІЕ.

Поелику надобно сыскать только частицу BE, или FC, отрѣзанную отъ бока прямоугольнаго четвероульника, чтобъ остался бокъ ромба; то положивъ, что AB = a, BD, = b, BE = x, будетъ AE $= \sqrt{(a^2 + x^2)}$ (§. 372. Геом.). Но AE = ED, и BE = BD — BE = b — x. По Пиөагоровой же Теоремѣ $AB^2 + BC^2 = AE^2 = ED^2$; то будетъ.

$$a^2 + x^2 = b^2 - 2bx + x^2$$
$$a^2 + 2b\,x = b^2$$
$$2b\,x = b^2 - a^2$$
$$x = \frac{b^2 - a^2}{2b}$$

То есть найдется x, когда къ 2b, b + a и b — a будетъ найдена четвертая пропорціональная линея. Ибо 2b : b + a = b — a : x.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XXVII.

§. 159. Прямая линея *въ среднемъ и крайнемъ содержаніи раздѣленною* (media et extrema ratione secta) называется, когда вся ли-

линея AC къ большому отрѣзку AB содержится такъ, какъ большой отрѣзокъ AB къ меньшому отрѣзку BC. ф. 8.

ЗАДАЧА LIX.

§. 160. Раздѣлить прямую линею AC показаннымъ образомъ.

РѢШЕНІЕ.

Положивъ, что вся линея AC = a, большой отрѣзокъ AB = x; то будетъ меньшой отрѣзокъ BC = a — x. И такъ, въ силу опредѣленія.

$$a : x = x : a - x$$
$$a^2 - ax = x^2$$
$$a^2 = x^2 + a x$$
$$a^2 + \tfrac{1}{4} a^2 = x^2 + a x + \tfrac{1}{4} a^2$$
$$\sqrt{(a^2 + \tfrac{1}{4} a^2)} - \tfrac{1}{2} a = x$$

То есть, съ цѣлою линеею AC соедини подъ прямымъ угломъ половинную ея часть AD, и изъ центра D полупоперешникомъ DC начерти дугу CE такъ, чтобъ было DC = DE = $\sqrt{(a^2 + \frac{1}{4} a^2)}$ (§. 372. геом.). Но какъ DA = $\frac{1}{4}$ a; то будетъ AE = x. ф. 8.

ПРИМѢЧАНІЕ.

§. 161. Такое раздѣленіе прямой линеи древніе Геометры называли *Божественнымъ раздѣленіемъ* (dininam sectionem), поелику изъ того много доказывано, какъ то видно изъ Эвклида.

ПРИ-

ПРИБАВЛЕНІЕ.

§. 162. Когда вся линея AC = a будетъ полупоперешникъ круга; то большая ея часть. FC = x будетъ бокъ десятиугольника.
Ф. 10.

ЗАДАЧА LX.

§. 163. Начертить прямоугольной треугольникъ ABD, когда будутъ даны ипотенуза AB и плоскость онаго.
Ф. 11.

РѢШЕНІЕ.

Положивъ, что AB = a, перпендикулъ DC = y, плоскость = b^2; то таже будетъ плоскость = $\frac{1}{2}$ ay (§. 338. геом.). И такъ.

$$\frac{1}{2}\ ay = b^2$$

$$y = \frac{2b^2}{a}$$

То есть, на AB = a начертивъ полкруга, въ точкѣ A возставь перпендикулъ AE = 2b, и проведи линею EB. Потомъ сдѣлавъ AG = $\frac{1}{2}$ AE = b, проведи линею FG параллельную съ EB; то будетъ AF $= \frac{2b^2}{a}$. Наконецъ означь линею FD параллельную съ AB, то и означится искомой треугольникъ ADB.

ЗАДА-

ЗАДАЧА LXI.

§. 164. Найти въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC ипотенузу AC; когда будутъ даны разность катетовъ AE и перпендикулъ, изъ прямаго угла на ипотенузу опущенной BD. Ф. 12.

РѢШЕНІЕ.

Положивъ, что разность катетовъ AE = a, перпендикулъ DB = b, ипотенуза AC = x, сумма двухъ катетовъ AB † BC = y; то будетъ $AB = \frac{1}{2} y + \frac{1}{2} a$, $BC = \frac{1}{2} y - \frac{1}{2} a$ (§. 80. Тригон). И такъ.

$$\frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} a^2 = x^2 \text{ (§. 372. Геом.)}$$

$$y^2 + a^2 = 2x^2$$

$$y^2 = 2x^2 - a^2$$

Или BC : BD = AC : AB (§. 269. Геом.)

$$\frac{1}{2} y - \frac{1}{2} a : b = x : \frac{1}{2} y + \frac{1}{2} a$$

$$bx = \frac{1}{4} y^2 - \frac{1}{4} a^2$$

$$4bx = y^2 - a^2$$

$$4bx + a^2 = y^2$$

$$4bx + a^2 = 2x^2 - a^2 \text{ (§. 31. Ариѳ.)}$$

$$4bx + 2a^2 = 2x^2$$

$$2a^2 = 2x^2 - 4bx$$

$$a^2 = x^2 - 2bx$$

$$a^2 + b^2 = x^2 - 2bx + b^2 \text{ дополн. квадр.}$$

$$\sqrt{(a^2 + b^2)} + b = x$$

То есть, въ силу 4. пункта (§. 140.) сдѣлавъ $\sqrt{(a^2 + b^2)}$, къ оному приложи b, и произойдетъ ипотенуза x. Когдажъ извѣ-

вѣстна ипотенуза; то самой треугольникъ, коего разность боковъ извѣстна, составится слѣдующимъ образомъ: сдѣлавъ прямой уголъ, на обоихъ бокахъ онаго означь перпендикулъ x; то будетъ ипотенуза GI $= V x^2$; на сей ипотенузѣ начертивъ полкруга, отъ G до H означь хорду GH $=$ a; то будетъ HI $= V(2x^2 - a^2) = y$ (§. 374 геом). Когдажъ извѣстна сумма
ф. 13. боковъ $=$ y и разность оныхъ $=$ a; то самые бока удобно находятся, и потомъ изъ оныхъ составляется искомой треугольникъ.

ЗАДАЧА LXII.

§. 165 Найти въ прямоугольномъ треугольникѣ катеты AB и AC; когда будутъ даны сумма оныхъ AB † AC и перпендикулъ, изъ прямаго угла на ипотенузу опущенной AD.

РЕШЕНІЕ

Положивъ, что сумма катетовъ AB
ф. 14. † AC $=$ a, перпендикулъ AD $=$ b; CA $-$ AB $=$ y, BC $=$ x; то будетъ AC $= \frac{1}{2}(a + y)$, AB $= \frac{1}{2}(a - y)$ (§. 80. трогон.). И такъ.

$$x^2 = \frac{1}{2}(a^2 + y^2) \qquad BA : DA = BC : AC$$
$$2x^2 = a^2 + y^2 \qquad \frac{1}{2}(a - y) : b = x : \frac{1}{2}(a + y)$$
$$2x^2 - a^2 = y^2 \qquad \frac{1}{4}(a^2 - y^2) = bx$$
$$a^2 - 4bx = y^2$$

2x²

$$2x^2 - a^2 = a^2 - 4bx$$
$$x^2 + 2bx = a^2$$
$$x^2 + 2bx + b^2 = a^2 + b^2 \text{ допол. квадр.}$$
$$x = \sqrt{(a^2 + b^2)} - b$$

То есть, на данной линеѣ CD = a начерти прямоугольной продолговатой четвероугольникъ CDFG, котораго бы высота DF равно была данному перпендикулу AD = b; такимъ образомъ будетъ CF = $\sqrt{(a^2 + b)}$. Потомъ сдѣлай FE = FD, и CB = CE; то будетъ CB = $\sqrt{(a^2 + b^2)} - b$. Ф. 15.

И такъ на CB начертивъ полкруга и проведши линеи AB и AC, получишь желаемой треугольникъ CAB.

ЗАДАЧА LXIII

§. 166. Найти высоту AD треугольника ABC; когда будутъ даны всѣ три бока онаго. Ф. 16.

РѢШЕНІЕ

Положивъ, что AB = a, BC = b, AC = c, BD = x; то будетъ. DC = b — x. Но поелику $AB^2 - BD^2 = AD^2$, и $AC^2 - DC^2 = AD^2$ (§. 374. геом.); то будетъ $AB^2 - BD^2 = AC^2 - DC^2$ (§. 32. Ариѳ.); слѣдовательно

$$a^2 - x^2 = c^2 - b^2 + 2bx - x^2$$
$$a^2 + b^2 - c^2 = 2bx$$
$$\frac{a^2 + b^2 + c}{2b} = x$$

ПРИ-

ПРИБАВЛЕНЕ.

§. 167. ИзЪ чего явствуетЪ, что естьли вЪ треугольникЪ ABC изЪ верьху угла A на основанiе BC опустится перпендикулЪ; то вЪ такомЪ случаѢ основанiе BC кЪ суммѢ двухЪ боковЪ AB † AC будетЪ содержаться такЪ, какЪ разность оныхЪ боковЪ AB — AC содержится кЪ разности отрѢзковЪ отЪ основанiя BD — CD; то есть, $BC : AB + AC = AB - AC : BD - CD$. СыскавЪ же BD, можно будетЪ найти AD (§. 374. Геом.). ПоложивЪ, что $a = 6$, $b = 4$, $c = 3$; то будетЪ $x = 36 + 16 = 52 - 9 = 43 : 8 = 5\frac{5}{8}$

$$AB^2 = 2304 : 64$$
$$BD = 1849 : 64$$
$$AD^2 = \frac{455}{64}$$
$$AD = \sqrt{\frac{455}{64}} = 21\frac{33}{100} = \frac{2133}{800}$$

ЗАДАЧА LXIV.

§. 168. СдѢлать одному данному треугольнику HLI равной, а другому данному треугольнику NOP подобной треугольникЪ. ф.17.

РѢШЕНIЕ.

ПоложивЪ, что $HI = f$, $LM = e$, $NP = m$ $QO = n$, основанiе искомаго треугольника $= y$, высота $= z$; то будетЪ $m : n = y : z$ (§. 343. Геом.) $fe = yz$ (§. 338. Геом.)

$$mz = ny \qquad \frac{fe}{y} = z$$

$$\frac{mfe}{y} = mz$$

И такЪ
$$ny = \frac{mfe}{y}$$

$$ny^2 = mfe$$

$$y^2 = \frac{mfe}{n}$$

$$y = \sqrt{\frac{mfe}{n}}$$

То есть, продолжи высоту OQ треугольника NOP до M такЪ, чтобЪ было OM = LM, также продолжи бока того треугольника до R и S, и чрезЪ точку M проведи линею RS, параллельную сЪ NP; то будетЪ RS $= \frac{me}{n}$; потомЪ между RS и SI = f, найди среднюю пропорціональную линею FS $= \sqrt{\frac{mfe}{n}}$, на которой, по причинѢ данныхЪ угловЪ N и P, можно начертить треугольникЪ TSV (§. 174. Геом.)

ЗАДАЧА LXV.

§. 169. Провести отЪ данной точки E прямую линею ED, которая бы кЪ данному кругу GDFG сдѢлала токмо прикосновеніе. Ф. 18.

РѢШЕНІЕ.

По елику точка E положеніемъ, а кругъ GDFG какъ положеніемъ, такъ и величиною извѣстенъ; то будутъ также извѣстны линеи EG и GC. И такъ, положивъ, что EG = a, GC = b, ED = x, будетъ = EF = a † 2b; почему въ силу (§. 330. Геом.)

$$a^2 \dagger 2ab = x^2$$
$$x = \sqrt{(a^2 \dagger 2ab)}$$

То есть, соединивъ центръ круга C и данную точку E прямою линеею EC, опиши на соединенной линеѣ полкруга CDE и проведи хорды CD и DE; то уголъ D будетъ прямой (§. 260. Геом.). Почему CE^2 $a^2 \dagger 2ab \dagger b^2$, $CD^2 = b^2$; слѣдовательно $DE = \sqrt{(2ab \dagger a^2)}$ (§. 372. Геом.).

ТЕОРЕМА V.

§. 170. Въ прямоугольномъ треугольникѣ квадратъ ипотенузы равенъ квадратамъ, вмѣстѣ взятымъ, двухъ катетовъ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПЕРВОЕ.

Къ боку C въ прямой линеѣ присовокупивъ бокъ B, начерти на B † C квадратъ, которой будетъ заключать въ себѣ квадратъ HH и четыре треугольника равные между собою. Ибо углы n † r † m, такожъ
ф. 19. s † n † m, поелику составляютъ по 180° (§. 133. и 135. Геом.), суть равны между собою

собою (§. 86. Геом.). И естьли отъ равныхъ отнимешь по равному, то есть, r и s и общей имъ уголъ m, то и останутся равные n = n (§. 36. Ариѳ.). Почему m = m, и для того треугольники snm и knm равны между собою: слѣдовательно и другіе два треугольника также равны между собою. Но какъ всякой треугольникъ изъ оныхъ = $\frac{1}{2}$ B × c; то четыре треугольника = 4 × $\frac{1}{2}$ BC = 2 BC. И такъ

$$(C \dagger B)^2 = HH \dagger 2\,BC$$

также $(C \dagger B)^2 = BB \dagger 2\,BC \dagger CC$ (§ 31.);

то будетъ $HH \dagger 2\,BC = BB \dagger 2\,BC \dagger CC$

$$HH = BB \dagger CC.$$ ч. н. д.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ВТОРОЕ.

На ипотенузу AB = b изъ прямаго угла ф. 20. опустивъ перпендикулъ CD, и положивъ, что отрѣзокъ основанія BD = x; то будетъ другой отрѣзокъ AD = b — x, притомъ положивъ, что AC = a, BC = c; то будетъ

$$AB : BC = BC : BD \quad \text{и} \quad BA : AC = AC : AD$$

$$b : c = c : x \qquad b : a = a : b - x$$

$$c^2 = bx \qquad a^2 = b^2 - bx$$

$$c^2 \dagger a^2 = bx \dagger b^2 - bx$$

$$c^2 \dagger a^2 = b^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТРЕТІЕ. ф.21.

Бокомъ AC, такъ какъ полупоперешникомъ, описавъ кругъ, продолжи BC до

 M;

М; то уголъ КАМ, какъ состоящей въ полукружiи, будетъ прямой, и уголъ САВ есть также прямой по положенiю; и ежели отъ сихъ угловъ отнимешь общей имъ уголъ n; то останутся равные o и s. И какъ треугольникъ МСА есть равнобедренной; то углы, при основанiи находящiеся r и s, будутъ равны между собою. И такъ треугольники МВА и АВК, по причинѣ равныхъ угловъ r и o и общаго В, суть подобны между собою; и потому

$$BM : AB = AB : BK$$

$$AB^2 = BM \times BK$$

$$\text{или } AB^2 = (2CK + KB) \times KB$$

$$AB^2 = 2CK \times KB + KB^2$$

Приложивъ же съ обѣихъ сторонъ равные квадраты AC^2 и CK^2, будетъ

$$AB^2 + AC^2 = CK^2 + 2CK \times KB + KB^2.$$

Но какъ послѣдней членъ изображаетъ квадратъ ипотенузы, состоящей изъ частей СК + КВ, или CB^2; то будетъ $AB^2 + AC^2 = BC^2$. ч. н. д.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЧЕТВЕРТОЕ.

Положивъ, что АС = a, ВС = c, и симъ бокомъ, такъ какъ полупоперешникомъ, опиши кругъ, которой пересѣчетъ ипотенузу въ точкѣ Е. Потомъ ипотенузу

ф. 22. АВ = b раздѣливъ на двѣ равныя части въ точкѣ I, продолжи АС до F а IC до G; также

также проведи линеи EF и PB, и будетъ $IC = IB = \frac{1}{2} b$ (§. 142.); почему $IQ = \frac{1}{2} b - c$. Но какъ треугольники AFE и ABP суть подобные, по причинѣ общаго угла A и равныхъ угловъ F и B, при окружности находящихся; то будетъ

$$BA : AP = AP : AE$$

$$BA : FA = AP : AE$$

или $b : a + c = a - c : \frac{a^2 - c}{b} = AE$

также $IB : IG = IQ : IE$

или $\frac{1}{2} b : \frac{1}{2} b + c = \frac{1}{2} b : \frac{b^2 - 4c^2}{2b} = IE$

Но какъ $\frac{1}{2} b = AE - IE = \frac{a^2 - c^2}{b} - \frac{b^2 - 4c^2}{2b}$

$$= \frac{2a^2 - 2c^2}{2b} - \frac{b^2 + 4c^2}{2b} = \frac{2a^2 - b^2 + 2c^2}{2b} = \frac{1}{2} b$$

то $b = \frac{4a^2 - 2b^2 + 4c^2}{2b} = \frac{2a^2 - b^2 + 2c^2}{b}$.

Почему $b^2 = \frac{2b^2 a - b^3 + 2bc^2}{b} = 2a^2 - b^2 + 2c^2$

или $b^2 = 2a^2 - b^2 + 2c^2$

$$2b^2 = 2a^2 + 2c^2$$

$b^2 = a^2 + c^2$. ч. н. д.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПЯТОЕ.

Положивъ, что $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$, и опустивъ изъ верьху прямаго угла на ипотенузу перпендикулъ CD; то произойдутъ ф. 20.

 тре-

треугольники $ABC = T$, $DBC = t$, $ADC = m$, между собою подобные (§. 269. Геом.) и содержатся, какъ квадраты сходственныхъ ихъ боковъ (§. 346. Геом.). Почему

$$T : t = b^2 : c^2$$
$$t : T = b^2 : a^2$$
$$T : b^2 = t : c^2 = T : a^2$$
$$T + t + T : b^2 + c^2 + a^2 = T : b^2$$
$$Tb^2 + tc^2 + Ta^2 = Tb^2 + tb^2 + Tb^2$$
$$Tc^2 + Ta^2 = tb^2 + Tb^2.$$

Изъ сего сравненія можно вывести слѣдующую пропорцію:

$$T : t + T = b^2 : a^2 + c^2$$

Но какъ въ сей пропорціи первой членъ равенъ второму; то есть, $T = t + T$; то будетъ и третей членъ равенъ четвертому, то есть, $b^2 = a^2 + c^2$ ч. н. д.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ШЕСТОЕ.

Оставя тѣ же наименованія, какія были въ предложенномъ пятомъ доказательствѣ, а назовемъ только здѣсь основанія части $AD = z$, $GB = x$ такъ, чтобъ было $b = z + x$. И такъ, поелику b, c, x, такожъ b, a, z суть количества непрерывно пропорціональныя, будетъ $b : z = b^2 :$
ф.20. a^2, то есть, въ пропорціи непрерывной первой членъ къ третьему содержится такъ, какъ квадратъ перваго къ квадрату втораго; притомъ $bx = c^2$ и $bz = a^2$. Почему,

чему, въ силу того, естьли равныя будутъ умножены на равныя; то и произведенія произойдутъ равныя, будетъ

$$a^2 b x = c^2 b z$$

$$a^2 x = c^2 z$$

Изъ сего сравненія можно вывести слѣдующую пропорцію:

$c^2 : a^2 = x : z$

$c^2 + a^2 : a^2 = x + z : z$ (§. 152. Арие.)

$c^2 + a^2 : a^2 = b : z$ (§. 31. Арие.)

$c^2 + a^2 : a^2 = b^2 : a^2$

$c^2 + a^2 : b^2 = a^2 : a^2$

Но $a^2 = a^2$;

то будетъ. $c^2 + a^2 = b^2$. Ч. н. д.

ТЕОРЕМА VI.

§. 171. Подобные прямоугольные четвероугольники содержатся между собою, какъ квадраты основаній, или высотъ ихъ, то есть, $AB : ab = A^2 : a^2$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Когда $A : a = B : b$ по положенію; то будетъ $Ab = aB$ (§. 135. Арие.), умноживъ же сіи произшедшія равныя произведенія на Aa, получишь слѣдующее сравненіе: $AaaB = AAab$, (§. 141. Арие.), изъ котораго можно вывести слѣдующую пропорцію: $AB : ab = A^2 : a^2$. Ч. н. д. ф. 23.

ТЕОРЕМА VII.

§. 172. Подобные треугольники содержатся между собою, какъ квадраты оснований, или высотъ ихъ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Ф. 24. Положивъ, что сходственные бока A и a, основанія B и b, перпендикулы P и p, которые бокамъ, а потому и основаніямъ ихъ пропорціональны такъ, что будетъ $B : b = P : p$. Почему $BP = BbP$ (§. 135. Ариѳ.). Сіи произведенія, какъ равныя количества, естьли умножишь на $\frac{1}{2}Bb$; то произойдутъ равныя $\frac{1}{2}B^2bp = \frac{1}{2}Bb^2P$ (§. 141. Ариѳ.); изъ сего сравненія можно вывести слѣдующую пропорцію: $B^2 : b^2 = \frac{1}{2}BP : \frac{1}{2}bp$. Ибо треугольники, имѣющіе одинакое основаніе и одинакую высоту параллелограммовъ, суть половинныя тѣхъ части (§. 290. Геом.). Ч. н. д.

ПРИБАВЛЕНІЕ.

§. 173. Слѣдовательно всѣ параллелограммы и всѣ круги, то есть, плоскости круговъ, какъ правильные многоугольники, подобные между собою, и составленные изъ равно многихъ треугольниковъ, подобныхъ и равныхъ, содержатся между собою, какъ квадраты поперешниковъ, или полупоперешниковъ ихъ.

ТЕОРЕМА VIII.

§. 174. Поперешники круговЪ, на пр. D и d, содержатся между собою, какЪ ихЪ окружности, на пр. P и p.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Когда плоскости круговЪ, на пр. $\frac{1}{4}$ DP и $\frac{1}{4}$ dp, содержатся между собою, какЪ квадраты поперешниковЪ ихЪ, на пр. $D^2 : d^2$, то есть, $\frac{1}{4} DP : \frac{1}{4} dp = D^2 : d^2$ (§. 165.), или раздѢливЪ на 4, будетЪ

$DP : dp = D^2 : d^2$

$DPd^2 = dpD^2$ (§. 135. Ариѳ)

$Pd = pD$ раздѢл. на Dd.

ИзЪ сего сравненія можно вывести слѢдующую пропорцію:

$D : d = P : p$. Ч. н. д.

ПРИБАВЛЕНІЕ.

§. 175. Поелику $D : d = R : r$; то будетЪ и $R : r = P : p$. То есть, когда поперешники содержатся между собою, какЪ полупоперешники; то и полупоперешники круговЪ будутЪ содержаться между собою, какЪ окружности ихЪ.

ЗАДАЧА. LXVI.

§. 176. Найти плоскость равносторон- Ф. 25.
наго треугольника ABC; когда будетЪ данЪ одинЪ бокЪ его.

РѢШЕНІЕ.

Изъ верьху B равносторонняго треугольника опусти на основаніе онаго перпендикулъ BD, которой раздѣлитъ основаніе AC на двѣ равныя части въ точкѣ D. И такъ, положивъ CD, или AC $= b$, будетъ все основаніе, или cB $= 2b$; и потому BD^2, или $cB^2 - cD^2 = 2b^2 - b^2$ $= 4b^2 - b^2 = 3b^2$; слѣдовательно BD $= \sqrt{3b^2}$. То есть, плоскость равносторонняго треугольника $= b \times \sqrt{3b^2}$ (§. 338. Геом.), или $\sqrt{3b^2 \times b^2}$ (§. 67, 68, 69.).

ТЕОРЕМА IX.

Ф. 20. §. 177. Во всякомъ треугольникѣ, на пр. ABC естьли на самой большой бокъ его, какъ на основаніе, изъ верьху опустится перпендикулярная линея, на пр. CD $= y$; то она основаніе на пр. AB $= b$, раздѣлитъ на двѣ части, то есть, на BD $= x$ и DA $= b - x$ такъ, что квадратъ бока AC $= a$, противоположеннаго острому углу B, будетъ равенъ квадратамъ прочихъ двухъ боковъ, вмѣстѣ взятымъ, безъ двухъ параллелограммовъ, произшедшихъ изъ умноженія AB на BD; то есть $a^2 = c^2 + b^2 - 2bx$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

A. $a^2 = y^2 + (b^2 - 2bx + x^2)$

B. $c^2 = y^2 + x^2$ (A — B)

C.

$$C. \quad a^2 - c^2 = b^2 - 2bx \; (C + c^2)$$

$$D. \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bx.$$ Ч. н. д.

ПРИБАВЛЕНIЕ 1.

§. 178. Когда, въ силу доказаннаго, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$; то будетъ $2bx = b^2 + c^2 - a^2$, или раздѣливъ на $2b$, будетъ $x = \frac{b^2 + c^2 - a}{2b} = BD$.

ПРИБАВЛЕНIЕ 2.

§. 179. Равнымъ образомъ положивъ $AD = x$, будетъ $AD = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}$. И потому во всякомъ треугольникѣ, по даннымъ тремъ его бокамъ, можно найти отрѣзокъ x, слѣдовательно и перпендикулярную линею y, и наконецъ всю плоскость треугольника.

ПРИБАВЛЕНIЕ 3.

§. 180. Когда $BD = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}$ (§. 170.) и $AD = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}$ (§. 171.); то будетъ разность отрѣзковъ $BD - AD = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b} - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b} = \frac{b^2 + c^2 - a^2 - a^2 - b^2 + c^2}{2b} = \frac{2c^2 - 2a^2}{2b} = \frac{c^2 - a^2}{ab} = \frac{(c+a) \times (c-a)}{b}$. Изъ

сего

сего сравненія можно вывести слѢдующую пропорцію:

$$b : c + a = a - a : BD - AD$$

вмѢсто BD — AD, положивЪ d, будетЪ

$$b : c + a = c - a : d$$

То есть, d есть четвертое пропорціональное число; знавшижЪ d, будетЪ большой отрѢзокЪ $DB = \frac{b + d}{2}$, а меньшой $AD = \frac{b - d}{2}$ (§. 80. Тригон.); слѢдовательно перпендикулЪ $y = \sqrt{(a^2 - AD)} = \sqrt{(c^2 - BD^2)}$ (§. 374. Геом.).

ТЕОРЕМА X.

ф. 24. §. 181. Два треугольника ABC и abc, имѢющіе по одному равному углу, на пр. A = a, содержатся между собою, какЪ произведенія, произшедшія изЪ умноженія двухЪ боковЪ, тѢ равные углы замыкающихЪ; то есть ABC : abc = AC × AB : ac × ab.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Плоскости треугольниковЪ содержатся собою, какЪ произведенія, произшедшія изЪ умноженія половинныхЪ основаній на высоты ихЪ (. 338. Геом.), или, какЪ произведенія, произшедшія изЪ умноженія основаній на высоты; ибо какое содержаніе имѢютЪ между собою половинныя

ныя части, такое будутъ имѣть и цѣлыя, то есть, ABC : abc = AB × CD : ab × cd : по причинѣжъ подобія треугольниковъ ADC и adc, будетъ.

AC : CD = ac : cd

AC × AB: CD × AB = ac × ab: cd × ab (§. 141. Ариѳ.)
AC × AB: ac × ab = CD × AB: cd × ab (§. 139. Ариѳ.)
Но какъ AB × CD: ab × cd = ABC: abc (§. 31. Ариѳ)
то будетъ AC × AB : ac × ab = ABC: abc (§. 32. Ариѳ.). Ч. н. д.

ПРИБАВЛЕНІЕ.

§. 182. Слѣдовательно и параллелограммы, какъ въ разсужденіи треугольниковъ, имѣющихъ съ ними одинакое основаніе и одинакую высоту, суть вдвое, ежели будутъ имѣть по одному равному углу, содержатся между собою, какъ произведенія, произшедшія изъ умноженія боковъ, равные углы замыкающихъ.

ЗАДАЧА LXVII.

§. 183. Сдѣлать такой треугольникъ AMN, которой бы къ данному треугольнику ABC содержался, какъ 1 : 3; то есть, отъ даннаго треугольника ABC отрѣзать третью его часть. ф. 26.

РѢШЕНІЕ.

Положивъ, что AC = A, AB = B и отъ AC отрѣзываемая извѣстная часть AN = a; то сыскать надобно будетъ x,

или

или AM такъ чтобъ было AMN : ABC = 3. 1:

Но какъ 1 : 3 = AMN : ABC (§. 31. и 140 Ариѳ.) также 3 : 1 = ABC : AMN (§. 138. Ариѳ.); то будетъ 3 : 1 = A×B : a×x

или $3ax = A \times B$ (§. 136. Ариѳ.)

$$x = \frac{A \times B}{3a}$$

или $3a : A = B : x$

То есть, x есть четвертая пропорціональная линея къ тремъ даннымъ 3a, A. B.

ПРИБАВЛЕНІЕ 1.

§. 184. Естьли NM параллельна съ CB; то будетъ

$$A : B = a : x$$
$$A : A = a : a \text{ (§. 141. Ариѳ.)}$$
$$A^2 : AB = a^2 : ax$$
$$A^2 : a^2 = AB : ax \text{ (§. 139. Ариѳ.)}$$

Но какъ треугольники ABC и AMN содержатся между собою, какъ AB : ax; то они будутъ содержаться между собою также, какъ $A^2 : a^2$ (§. 31. Ариѳ.), что есть, подобные треугольники содержатся между собою, какъ квадраты сходственныхъ ихъ боковъ.

ПРИБАВЛЕНІЕ 2.

§. 185. Ежели отъ извѣстной плоскости треугольника ABC пожелаешь отрѣзать

зать какую нибудь треугольную часть, на пр. третью часть изъ всей плоскости чрезъ параллельную MN, чтобъ имѣть a, или x, то положивъ.

$3 : 1 = ABC : AMN$ (§. 175.)

$3 : 1 = B^2 : x^2$ (§. 32. Ариѳ.)

$3x^2 = B^2$ (§. 136. Ариѳ)

$$x^2 = \frac{B^2}{3}$$

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{3} B^2}$$

То есть, x есть средняя пропорціональная линея между B и $\frac{B}{3}$

ЗАДАЧА LXVIII.

§. 186. Найти бокъ правильнаго пятіугольника ABCDE; когда будетъ дана въономъ діагональная линея AD. ф. 27.

РѢШЕНІЕ.

Положивъ, что $AE = x$, $AD = a$; то, поелику мѣра угла AEF есть дуга AB (§. 259. Геом.), и мѣра угла EFD есть половинная дуга AE съ половинною дугою ED (§. 263. Геом.), или дуга AB; будетъ уголъ AEF = углу AEF, и потому $AF = AE$ (§. 67.) $= x$; слѣдовательно $FD = a - x$. Также мѣра угла AED есть дуга AB † ½ B (§. 259.), и угла F мѣрою дуга AB † ½ BC (§. 263. Геом.), притомъ уголъ ADE обоимъ треугольникамъ ADE и EFD есть общей;

щей; того ради, для подобія сихъ треугольниковъ, будетъ имѣть здѣсь мѣсто слѣдующая пропорція:

$$AD : ED = ED : FD \text{ (§. 210. Геом.)}$$
$$a : x = x : a - x \text{ (§. 31. Ариө.)}$$
$$a^2 - ax = x^2$$
$$a^2 = x^2 + ax$$

То есть, x есть большая часть линеи a, въ среднемъ и крайнемъ содержаніи раздѣленной (§. 149 и 150.).

ЗАДАЧА LXIX.

§. 187. Найти кругъ равной поверьхности цилиндра.

РѢШЕНІЕ.

Положивъ, что поперешникъ цилиндра $= d$, окружность его $= p$, высота онаго $= a$; то будетъ поверьхность цилиндра $= ap$ (§. 514. Геом.). Положивъ также, что поперешникъ круга $= x$; то будетъ $d : p = \frac{px}{d}$ окружность круга (§. 276. Геом.), плоскость же его $= \frac{px^2}{4d}$ (§. 364. Геом.). И такъ

$$\frac{px^2}{4d} = ap$$
$$px^2 = 4dap$$
$$x^2 = 4da$$
$$x = \sqrt{2ad} = 2\sqrt{ad}$$

То

То есть, поверьхность цилиндра равняется такому кругу, коего полупоперешникЪ есть средняя пропорцiональная линея между поперешникомЪ и высотою цилиндра.

ЗАДАЧА LXX.

§. 188. Найти цилиндрЪ, коего бы поверьхность равна была данному кругу.

РѢШЕНIЕ.

ПоложивЪ, что полупоперешникЪ круга $= r$, окружность онаго $= p$, высота цилиндра $= x$, полупоперешникЪ основанiя $= y$; то будетЪ окружность его $r : p = y : \frac{py}{r}$ (§. 276); поверьхность же онаго будетЪ

$$\frac{pyx}{r} = \tfrac{1}{2}pr \text{ (§. 514. Геом.)}$$

$$pyx = \tfrac{1}{2}pr^2$$

$$yx = \tfrac{1}{2}r^2$$

$$x = \frac{r^2}{2y}$$

ИзЪ чего явствуетЪ, что сiя задача есть неопредѣленная такЪ, что полупоперешникЪ, или, что все равно, высота по изволенiю взята быть можетЪ.

ЗАДАЧА. LXXI.

§. 189. Найти поперешникъ цилиндра; когда будутъ даны поперешникъ шара и высота цилиндра, равнаго шару.

РѢШЕНІЕ.

Положивъ, что поперешникъ шара $= d$, окружность $= P$, высота цилиндра $= a$, поперешникъ его $= x$; то будетъ толщина шара $\frac{1}{6} pd^2$ (§. 538. Геом.), окружность цилиндра $= \frac{px}{d}$, толщина онаго $\frac{apx^2}{4d}$ (§. 514. Геом.). И такъ

$$\frac{1}{6}pd^2 = \frac{apx^2}{4d}$$

$$\frac{4}{6}pd^3 = apx^2$$

$$\frac{2d^3}{3a} = x^2$$

$$x = \sqrt{\frac{2d^3}{3a}}$$

По елику изъ сравненія $\frac{2d^3}{3a}$ можно вывести слѣдующую пропорцію: $3a : 2d = d^2 : x^2$: то квадратъ поперешника шара къ квадрату поперешника цилиндра, равнаго шару, содержится такъ, какъ втрое взятая высота цилиндра къ поперешнику шара, вдвое взятому.

То

То есть, сдѣлай AB = a, BC = $\frac{2}{3}$ d, ф. 28.
AD = d; то будетъ DE = DF = $\frac{2d^2}{3a}$; слѣдовательно DG = $\sqrt{\frac{2d^3}{3a}}$.

ЗАДАЧА LXXII.

§. 190. Найти высоту и поперешникъ цилиндра; когда будутъ даны содержанiе высоты цилиндра къ его поперешнику, и поперешникъ такого круга, которой равенъ плоскости цилиндра.

РѢШЕНIЕ.

Положивъ данное содержанiе m : n, поперешникъ круга = d, окружность = p, высота цилиндра = x; то будетъ поперешникъ его = $\frac{nx}{m}$, окружность же = d : p = $\frac{nx}{m}$ = $\frac{npx}{md}$; и потому

$$\frac{mpx^2}{md} = \frac{1}{4} pb$$

$$x^2 = \frac{md^2}{4n}$$

$$x = \sqrt{\frac{md^2}{4n}}$$

То есть, сдѣлавъ AB = a, возставь на ф. 28.
оной перпендикулъ BC = m; сдѣлай также

 же

же AD $= \frac{1}{2}$ d, и вЪ D возставь парпендикулЪ DE $= \frac{md}{2n}$; на конецЪ сдѣлай DF = DE, и на AF начерти полкруга; то будетЪ DG $= \sqrt{\frac{md^2}{4n}}$. Ибо n : m $= \frac{1}{2}$ d : $\frac{md}{2n}$, или $\sqrt{\frac{md^2}{4n}}$.

ЗАДАЧА LXXIII.

§. 191. Найти поперешникЪ шара, равнаго конусу; когда будутЪ даны поперешникЪ и высота того конуса.

РѢШЕНІЕ.

Положивъ, что поперешникЪ основанія конуса = d, окружность = p, высота его = a, поперешникЪ же шара = x; то будетЪ толщина конуса $= \frac{1}{12}$ adp; на противЪ того толщина шара $= \frac{px}{6d}$; слѣдовательно

$$\frac{1}{12}\,apd = \frac{px}{6d}$$
$$\frac{1}{2}\,ad^2 = x^3$$
$$\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}ad^2} = x$$

ЗАДАЧА LXXIV.

§. 192. Найти бокЪ тетраэдра AD, описываемаго вЪ шарѣ; когда будетЪ данЪ поперешникЪ AB того шара.

ф.29. РѢШЕНІЕ.

Положивъ, что поперешникЪ шара AB = a, бокЪ тетраэдра AD = x; то будетЪ CD полупоперешникЪ круга, вЪ кото-

торомЪ одинЪ изЪ треугольниковЪ того тетраэдра начерченЪ быть можетЪ $= \sqrt{\frac{1}{3}x^2}$ (§. 212. Геом.); положивЪ также, что $AC = y$; то будетЪ $CB = a - y$; слѢдовательно

$AC:CD = CD:CB$ (§. 267. Г.), $AD^2 = AC^2 + CD$ (§. 372. Г.)

$y : \sqrt{\frac{1}{3}x^2} = \sqrt{\frac{1}{3}x^2} : a - y$ $\quad x^2 = y^2 + \frac{1}{3}x^2$

$ay - y^2 = \frac{2}{3}x^2$ $\quad \frac{1}{3}x^2 = y^2$

$ay - \frac{2}{3}x^2 = \frac{1}{3}x^2$ $\quad y = \sqrt{\frac{2}{3}x^2}$

$ay = x^2$

$a\sqrt{\frac{2}{3}x^2} = x^2$

$\frac{2}{3}a^2 x^2 = x^4$

$\frac{2}{3}a^2 = x^2$

$\sqrt{\frac{2}{3}a^2} = x$

или $x^2 : a^2 = 2 : 3$.

То есть, квадратЪ бока тетраэдра кЪ квадрату поперешника шара, вЪ которомЪ онЪ описанЪ быть можетЪ, содержится, какЪ 2 : 3.

ПРИБАВЛЕНІЕ 1.

§. 193. СлѢдовательно бокЪ тетраэдра кЪ поперешнику шара, вЪ которомЪ онЪ описанЪ быть можетЪ, содержится, какЪ $\sqrt{2} : \sqrt{3}$, и по тому есть несоизмѢримой.

ПРИБАВЛЕНІЕ 2.

§. 194. Поелику $y = \frac{2}{3}x^2 = \frac{2}{3}ay$; то есть, тетраэдрЪ опишется вЪ шарѢ, естьли поперешникЪ AB раздѢлится на три равныя части и сдѢлается $AC = \frac{2}{3}AB$. Ф. 30.

ЗАДАЧА LXXV.

ф. 31. §. 195. Найти бокъ эксаэдра, или куба FG, описываемаго въ шарѣ; когда будетъ данъ поперешникъ шара.

РѢШЕНІЕ.

Положивъ, что поперешникъ шара, равной діагональной линеѣ $FH = a$, бокъ куба $FG = x$; то будетъ $FI^2 = 2x^2$, $FH^2 = 3x^2$ (§. 372. Геом.); слѣдовательно

$$3x^2 = a^2$$

$$x^2 = \frac{a^2}{3}$$

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{3} a^2}$$

То есть, квадратъ бока эксаэдра къ квадрату поперешника шара содержится, какъ $1 : 3$.

ПРИБАВЛЕНІЕ 1.

196. Слѣдовательно бокъ эксаэдра къ поперешнику шара, въ которомъ онъ описанъ быть можетъ, содержится, какъ $\sqrt{1} : \sqrt{3}$, и потому есть несоизмѣримой.

ПРИБАВЛЕНІЕ 2.

ф. 30. §. 197. Естьли на поперешникъ шара сдѣлаешь $AC = \frac{2}{3}a$ и $CB = \frac{1}{3}a$; то будетъ $AD = \sqrt{\frac{2}{3}a^2}$; и потому $DB = \sqrt{\frac{1}{3}a^2}$, или бокъ эксаэдра.

ЗАДА-

ЗАДАЧА LXXVI.

§. 198. Найти бокъ октаэдра, описываемаго въ шарѣ; когда будетъ данъ поперешникъ шара.

РѢШЕНІЕ.

Положивъ, что LM = x, поперешникъ шара KL = b; то, по елику ML есть хорда четверти круга, будетъ ф. 32.

$\frac{2}{4} b^2$, или $\frac{1}{2} b^2 = x^2$ (§. 372. Геом.)

$x = \sqrt{\frac{1}{2} b^2}$

То есть, квадратъ бока октаэдра къ квадрату поперешника шара содержится, какъ 1 : $\sqrt{2}$, и потому есть несоизмѣримой.

ПРИБАВЛЕНЕ.

§. 199. И такъ, естьли изъ центра шара E возставишь перпендикулярную линею EF, положивъ поперешникъ шара = b; будетъ FA = $\sqrt{\frac{1}{2} b^2}$ бокъ описываемаго въ шарѣ октаэдра. Бокъ же додекаэдра есть большая часть BG бока эксаэдра DB, въ томже шарѣ написаннаго, въ среднемъ и крайнемъ содержаніи раздѣленнаго въ точкѣ G. ф. 30.

ПРИМѢЧАНІЕ 1.

§. 200. Естьли поперешникъ шара будетъ 100000; то будетъ бокъ тетраэдра, въ немъ написаннаго, 81649, октаэдра 70710, эксаэдра 57736, икосаэдра 52573,

до декаэдра 35682. См. Геригон. Машем. Том. I. спр. 779.

ПРИМѢЧАНІЕ 2.

§. 201. Когда изъ поперешника шара, около правильныхъ шѣлъ описаннаго, можно находишь бока шѣхъ шѣлъ; шо не шрудно и дальнѣйшее изысканіе дѣлашь въ разсужденіи оныхъ: шо есшь, можно шакже поверьхносши и шолсшошы ихъ, какъ между собою, шакъ съ квадрашомъ и кубомъ поперешника шара сравниваш.

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

О

Употребленіи Алгебраическихъ сравненій при рѣшеніи Тригонометрическихъ задачъ.

ЗАДАЧА LXXVII.

§. 202. Найши высошу LM шреугольника HLI, когда будушъ даны углы, при основаніи онаго находящіеся H и I, и пришомъ основаніе HI.

ф.17.

РѢШЕНІЕ ПЕРВОЕ.

Положивъ, чшо HI = a, LM = x, синусъ угла MIL = s, косинусъ его = c, синусъ угла LHM = p, косинусъ его = q; шо (§§. 69. и 70 Тригон.), будешъ s : x = c :

$= c : MI$, и $p : x = q : HM$, или, $MI = \frac{cx}{s}$, $MH = \frac{qx}{p}$ (§. 175. Ариѳ.). И такъ (32. Ариѳ.)

$$\frac{cx}{s} + \frac{qx}{p} = a$$

$$pcx + sqx = asp$$

$$x = \frac{asp}{pc + sq}$$

Поелику изъ сравненія $pcx + sqx = asp$ можно вывести слѣдующую пропорцію: $pc + sq : sp = a : x$; то изъ сего явствуетъ, что въ треугольникѣ HIL основаніе HI къ высотѣ ML содержится такъ, какъ сумма прямоугольныхъ четвероугольниковъ, произшедшихъ изъ умноженія синуса одного угла, при основаніи находящагося, на косинусъ другаго, къ прямоугольному четвероугольнику, произшедшему изъ умноженія синусовъ угловъ, при основаніи находящихся.

РЕШЕНІЕ ВТОРОЕ.

Принявъ ML за цѣлой сикусъ, будутъ HM и MI тангенсы угловъ HLM и MLI, или котангенсы данныхъ H и I. И такъ, положивъ синусъ цѣлой $= t$, котангенсы $= m$ и n, $LM = x$, $HI = a$, будетъ $t : m = x : HM$, и $t : n = x : MI$ (§. 81. Тригон.);

слѣдовательно $HM = \frac{mx}{t}$, $MI = \frac{nx}{t}$, и потому

$$a = \frac{(mx + nx)}{t} \quad (\S.\ 32.\ \text{Ариѳ.})$$

$$at = mx + nx$$

$$\frac{at}{m+n} = x$$

То есть, основанiе треугольника содержится къ высотѣ его такъ, какъ сумма котангенсовъ угловъ, при основанiи находящихся, къ цѣлому синусу.

ЗАДАЧА LXXVIII.

ф.17. §. 203. Найти бока HL и LI треугольника HLI; когда будутъ даны углы, при основанiи находящiеся H и I, и притомъ сумма боковъ HL + LI.

РЕШЕНIЕ

Положивъ, что $HL = LI = a$, синусъ угла $H = m$, синусъ угла $I = n$, $HL = x$; то будетъ $IL = a - x$. И такъ (§. 81. Тригон.)

$$x : n = a - x : m$$

$$mx = na - nx$$

$$mx + nx = na$$

$$x = \frac{na}{m+n}$$

$$a - x = (ma + na - na) : (m + n) = ma : (m+n).$$

То

То есть, сумма боковъ HL † LI къ одному боку HL содержится такъ, какъ сумма синусовъ угловъ, при основанiи находящихся H и I, къ синусу угла I, которой противополагается боку H L.

ЗАДАЧА LXXIX.

§. 204. Найти отрѣзокъ MI отъ основанiя HI въ треугольникѣ HLI; когда будутъ даны углы, при основанiи онаго находящiеся H и I, и притомъ другой отрѣзокъ HM. Ф. 1 /.

РѢШЕНIЕ.

Положивъ, что $HM = a$, $MI = x$, синусъ угла $H = m$, косинусъ его $= n$, синусъ угла $I = p$, косинусъ его $= q$; то будетъ $n : a = m : ML$, или $ML = \frac{am}{n}$, и $q : x = p : ML$, или $ML = \frac{px}{q}$ (§. 69. и 70. Тригон.). И такъ

$$\frac{px}{q} = \frac{am}{n} \text{ (§. 32. Ариѳ.)}$$

$$pxn = amq$$

$$x = \frac{amq}{pn}$$

и $pn : mq = a : x$

То есть, изъ верьху даннаго треугольника L на основанiе HI опусти перпен-

пендикулъ LM; то одинъ отрѣзокъ HM къ другому отрѣзку MI будетъ содержаться такъ, какъ прямоугольной четвероугольникъ, произшедшей изъ умноженія синуса угла, при отрѣзкѣ MI находящагося, на косинусъ угла, при отрѣзкѣ HM находящагося, содержится къ прямоугольному четвероугольнику, произшедшему изъ умноженія синуса угла H на косинусъ угла I.

ЗАДАЧА LXXX.

Ф. 5. §. 205. Найти бока AB и BC прямоугольнаго треугольника ABC; когда будутъ даны плоскость онаго и притомъ уголъ C.

РѢШЕНІЕ.

Положивъ, что плоскость даннаго треугольника $= b^2$, $BC = x$, синусъ цѣлой $= r$; то будетъ $BA = \frac{2b^2}{x}$ (§. 339. Геом.). И такъ.

$$x : \frac{2b^2}{x} = r : t$$

$$x^2 : \frac{2b^2 r}{t}$$

$$x = \sqrt{\frac{2b^2 r}{t}}$$

То есть, плоскость прямоугольнаго треугольника къ квадрату одного бока BC содержится такъ, какъ половинной тангенсъ

тенсъ угла, при C находящагося, къ цѣлому синусу.

Или, между боками даннаго угла ADM возставь перпендикулъ FE, точку E взявъ по изволенію, будетъ DE = r и FE = t (§. 56. Тригон.); сдѣлай DG = FE, DH = b, и съ EG означь параллельную линею HI; то будетъ DI = br : t (§. 222. Геом.). Сдѣлай MI = 2b, и между MI и DI найди среднюю пропорціональную линею IK, которая будетъ одинъ бокъ. По томъ раздѣливъ MI на двѣ разныя части въ точкѣ L, сдѣлай IN = LI и проведи линею NO параллельную съ MK; то будетъ IO = $2b^2$: x (§. 222. Геом.) другой бокъ; слѣдовательно KOI есть искомой треугольникъ. Ф.32.

Или, въ углѣ по изволенію взятомъ EDA сдѣлавъ бокъ DE = 2b, возставь перпендикулъ AE; то будетъ AD = r, AE = t (§. 56. Тригон.); продолживъ EA до G, означь линею DG; то будетъ AG = $\frac{2br}{t}$; сдѣлай AH = AG и раздѣли AD на двѣ равныя части въ точкѣ I такъ, чтобъ было AI = b. На линеѣ HI начерти полкруга; то будетъ AL = $\frac{2br^2}{t}$. Наконецъ сдѣлай AB = AL, и изъ B проведи линею Ф. 8.

BC,

BC, параллельную съ DE; то будетъ ABC искомой треугольникъ.

ЗАДАЧА LXXXI.

ф. 14. §. 206. Найти высоту AD треугольника ABC; когда будутъ даны основанíе его BC и углы, при томъ основанíи находящíеся B и C.

РѢШЕНÍЕ.

Положивъ, что BC = a, AD = x; и поелику углы при D находящíеся суть прямые; то будутъ углы BAD и DAC извѣстны (§. 198. Геом.). Также положивъ, что синусъ угла ABD = t, синусъ угла BAD = r, синусъ угла DAC = q, синусъ угла ACD = p; то будетъ.

$$\left.\begin{array}{l} t : r = x : BD \\ p : q = x : CD \end{array}\right\} \text{(§. 69. 70 и 71. Тригон.);}$$

слѣдовательно
$$\left.\begin{array}{l} BD = \dfrac{rx}{t} \\[2ex] DC = \dfrac{qx}{p} \end{array}\right\} \text{(§. 222. Геом.)}$$

Но какъ BD + DC = BC (§. 34. Ариѳ); то будетъ

$$\frac{rx}{t} + \frac{qx}{p} = a$$

$$prx + tqx = apt$$

$$x = \frac{apt}{pr + tq}$$

дру-

ДРУГИМЪ ОБРАЗОМЪ.

Принявъ AD за цѣлой синусъ, будетъ BD тангенсъ угла BAD, DC тангенсъ угла DAC (§. 56. Тригон.). И такъ положивъ, что цѣлой синусъ $= t$, тангенсы m да n, будетъ.

$t : m = x : BD$
$t : n = x : DC$ } (§. 56. Тригон.);

слѣдовательно $BD = \frac{mx}{t}$
$DC = \frac{nx}{t}$ } (§. 222. Геом.)

Но какъ $BD + DC = BC$ (§. 34. Ариѳ.); то будетъ

$$a = \frac{(nx + mx)}{t}$$

$$at = nx + mx$$

$$\frac{at}{n + m} = x$$

То есть, къ суммѣ тангенсовъ угловъ BAD и DAC, къ цѣлому синусу и къ основанію BC сыскавъ четвертое пропорціональное число, получишь искомую высоту AD даннаго треугольника.

ЗАДАЧА LXXXII.

§. 207. Найти хорду CB дуги, сложенной изъ дугижъ AB и половиннаго ея допол- Ф. 33.

полненія къ полкругу; когда будутъ даны хорда дуги AB меньшей, нежели четверть круга, и притомъ полупоперешникъ круга CE.

РѢШЕНІЕ.

Данную хорду AB означивъ параллельно съ поперешникомъ круга CD, сдѣлай DF = AB и проведи прямыя линеи EB, AD и BF; то, поелику x = o (258. Геом.), и для параллельныхъ линей AD и BF (194. Геом.), x = y (§. 189. Геом.), будетъ o = y (§. 32. Ариѳ.). Но какъ CE = EB (§. 79. Геом.); то будетъ u = o (§. 186. Геом.) и u = y (§. 32. Ариѳ.). Слѣдовательно CF : CB = CB : CE (§. 210 Геом.). И такъ, положивъ, что AB = a, CE = r, CB = x, будетъ CF = a † 2r; слѣдовательно.

$$a \dagger 2r : x = x : r$$
$$ar \dagger 2r^2 = x^2$$
$$\sqrt{(ar \dagger 2r^2)} = x$$

ПРИБАВЛЕНІЕ 1.

§. 208. Когда уголъ CBD есть прямой (§. 260. Геом.); то будетъ $BD^2 = 4r^2 - ar - 2r^2 = 2r^2 - ar$ (§. 372. Геом.); слѣдовательно BD хорда половиннаго дополненія къ полкругу дуги AC = $\sqrt{(2r^2 - ar)}$.

ПРИ-

ПРИБАВЛЕНІЕ 2.

§. 209. И такЪ квадратЪ хорды DB, проведенной подЪ меньшею дугою, нежели четверть круга, равняется прямоугольному четвероугольнику, произшедшему изЪ умноженія полупоперешника CE на разность, какая находится между хордою AB, сЪ поперешникомЪ чрезЪ точку B проведенною параллельно, и между поперешникомЪ CD.

ПРИБАВЛЕНІЕ 3.

§. 210. ИзЪ чего явствуетЪ, что квадраты хордЪ CB и BD содержатся между собою, какЪ $2r^2 + ar : 2r^2 - ar$ (187. и 188.), то есть, какЪ $2r + a : 2r - a$ (§. 146. Ариѳ.); то есть, квадраты хордЪ CB и BD содержатся между собою, какЪ сумма изЪ поперешника CD и хорды AB кЪ разности, какая находится между сею хордою и поперешникомЪ.

ЗАДАЧА LXXXIII.

§. 211. Найти діагональную линею AB, проведенную вЪ четвероугольникЪ ABCE, написанномЪ вЪ кругЪ; когда будутЪ даны бока онаго четвероугольника AE, EB, BC и AC, и притомЪ другая діагональная линея EC. Ф. 31.

РѢШЕНІЕ.

Положивъ, что AE = a, EB = b, BC = c, AC = d, EC = f, AB = y, проведи линею EF такъ, чтобъ было o = x (§. 168. Геом.). Поеликужъ сверьхъ того ∠ ACE = ∠ ABE (§. 258. Геом.); то будетъ EC : AC = EB : BF, то есть, f : d = b : BF (§. 210. Геом.). И такъ BF = $\frac{bd}{f}$; поелику также ∠ EAB = ∠ ECB (§. 258. Геом.), ∠ AEF = ∠ CEB (§. 35. Ариѳ.); то будетъ EC : CB = EA : AF, то есть, f : c = a : AF (§. 210. Геом.). И такъ AF = $\frac{ac}{f}$; слѣдовательно

$$\frac{bd}{f} + \frac{ac}{f} = y \text{ (§. 32. Ариѳ.)}.$$

$$\frac{bd + ac}{f} = y$$

$$bd + ac = fy$$

То есть, въ четвероугольникѣ, написанномъ въ кругѣ AEBC, прямоугольной четвероугольникъ происходящей діагональной линеи EC на другую діагональную AB равняется прямоугольнымъ четвероугольникамъ, происходящимъ изъ умноженія противоположенныхъ боковъ EB на AC, и AE на BC.

ГЛАВА

ГЛАВА ОДИННАТЦАТАЯ

О

Свойствѣ кривыхъ линей.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XXVIII.

§. 212. *Поперешникъ* (Diameter) кривой линеи есть линея AD, раздѣляющая въ точкѣ P прямыя линеи MM, между собою Ф. 35. параллельныя, на двѣ равныя части. И въ особливости *осью* (axis) называется, естьли она прямыя линеи, параллельныя между собою, при прямыхъ углахъ пересѣкаетъ на двѣ равныя части.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XXIX.

§. 213. *Верьхъ* (vertex) кривой линеи есть точка A, изъ которой проводится поперешникъ.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XXX.

§. 214. *Ординаты* (ordinatae) суть линеи параллельныя MM, кои поперешникомъ пересѣкаются на двѣ разныя части; половинныя оныхъ части PM, называются *семіординаты* (Semiordinatae).

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XXXI.

§. 215. *Абсцисса* (abſciſſa) есть часть поперешника AP или другой линеи, къ которой кривая относится, между верьхомъ или другою какою неподвижною точкою и семіординатою

РМ умѣщающаяся; нѣкоторые называютъ абсциссу *стрѣлою* (sagittam).

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XXXII.

§. 216. *Поперешникъ косъ проведенной* (diameter transuersa) АВ есть такая линея,
Ф.36. которая, съ обѣихъ сторонъ между кривыми линеями продолженная, пересѣкаетъ на двѣ равныя части прямыя линеи ММ, между тѣмижъ кривыми линеями параллельныя.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XXXIII.

§. 217. *Поперешникъ сопряженной* (diameter coniugata) есть прямая линея DE, которая
Ф.37. пересѣкаетъ на двѣ равныя части линеи, съ другимъ поперешникомъ на пр. АВ проведенныя параллельно. Или, сопряженной поперешникъ DE есть линея параллельная съ семіординатами, или ординатами МР другаго поперешника АВ.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XXXIV.

§. 218. *Параметръ* (parameter), или *прямой бокъ* (latus rectum) есть такая линея,
Ф.38. которая, будучи умножена на абсциссу, равняется квадрату семіординаты.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XXXV.

§. 219. *Линеи изъ кривыхъ перемѣняемыя* (variabiles, mutabiles, Inconstantes) суть, кои при возрастѣніи, или умаленіи другихъ

тихъ линей, сами возрастаютъ, или умаляются. На пр. Семiординаты PM и абсциссы AP. Ибо онѣ, при возрастѣнiи, или умаленiи круга, сами возрастаютъ, или умаляются. На противъ того линеи изъ кривыхъ *неперемѣняемыя* (immutabiles, constantes, invariabiles) суть тѣ, кои, при возрастѣнiи, или умаленiи другихъ, сами не возрастаютъ и не умаляются. На пр. полупоперешникъ куга AC есть линея неперемѣняемая; ибо при возрастѣнiи, или умаленiи абсциссъ и семiординатъ AP и PM, самъ онъ не перемѣняется. Равнымъ образомъ параметръ въ трехъ коническихъ сѣченiяхъ и поперешникъ въ Эллипсисѣ и параболѣ почитаются неперемѣняемыми линеями.

ПОЛОЖЕНIЕ IX.

§. 220. *Линеи* неперемѣняемыя первыми азбучными буквами, на пр. a, b, c, и проч. а перемѣняемыя послѣдними, на пр. x, y, z означаются. И въ особливости абсцисса буквою x, а семiордината буквою y означается.

ПРИМѢЧАНIЕ.

§ 221. Между кривыми линеями особливо извѣстны тѣ, которыя изъ искуснаго разрѣзыванiя конуса происходятъ, почему и называются *сѣченiями коническими*

ми (Sectiones conicae). ОнывЪ считается три: Парабола, ЭллипсисЪ и Ипербола.

ОПРЕДѢЛЕНІ XXXVI.

§. 222. *Парабола* (parabola) есть такая кривая линея, вЪ которой квадратЪ семіординаты равняется прямоугольному четвероугольнику, произшедшему изЪ умноженія абсциссы на прямую неперемѣняемую линею, называемую параметромЪ. То есть, вЪ параболѣ $ax = y^2$.

Ф. 39.

ПРИБАВЛЕНІЕ 1.

§. 223. Слѣдовательно вЪ параболѣ $a = y^2 : x$, то есть, параметрЪ есть третья пропорціональная линея ко всякой абсциссѣ и кЪ принадлежащей до нея семіординатѣ.

ПРИБАВЛЕНІЕ 2.

§. 224. СверьхЪ сего $y = \sqrt{ax}$, то есть, вЪ параболѣ семіордината есть средняя пропорціональная линея между параметромЪ и принадлежащею до нея абсциссою.

ПРИБАВЛЕНІЕ 3.

§. 225. На послѣдокЪ $x = y^2 : a$, то есть, вЪ параболѣ абсцисса есть третья пропорціональная линея кЪ параметру и семіординатѣ.

ЗАДАЧА. LXXXIV.

§. 226. Начертить параболу.

РѢШЕНІЕ.

1. На прямой линеѣ LP означь параметрЪ AL описываемой параболы. ф. 40.

2. ВЪ A возставивЪ неопредѣленной длины перпендикулЪ Am, и по изволенію на линеѣ LP выбравЪ нѣсколько центровЪ, начерти полукружія LMP, Lmp, и проч. то будетЪ AP, Ap и проч. абсциссы, AM, Am и проч. семіординаты параболы.

3. ТакимЪ образомЪ, естьли на ось AP перенесешь найденныя абсциссы, и на оныхЪ подЪ прямыми углами означишь ординаты, изЪ верьху A чрезЪ крайнія точки сихЪ означенныхЪ ординатЪ проходящая кривая линея будетЪ желаемая парабола.

ДРУГИМЪ ОБРАЗОМЪ.

1. Данной параболы параметрЪ AB ф. 39. продолживЪ до C, вЪ точкѣ B, внизЪ линеи AC, возставь перпендикулярную линею BN.

2. ИзЪ центровЪ, по изволенію взятыхЪ, растворивЪ ножку циркула до A, начерти дуги, прямую линею BV вЪ I. II. III. IV. V. и проч. прямуюжЪ BC вЪ 1. 2. 3. 4. 5. и проч. пересѣкающія; то будетЪ B1, B2, B3, B4, B5, и проч. абсциссы, а BI. BII. BIII. BIV. BV. и проч. семіординаты (§. 267. Геом.).

3. ПотомЪ частицы B1. B2. B3 и проч. на прямой линеѢ BC назначенныя, перенеси на линею BN, и вЪ точкахЪ 1. 2. 3. и проч. возставь перпендикулы 1I. = B1, 2II = B II. 3III = BIII и проч. ТакимЪ образомЪ кривая линея чрезЪ точки I. II. III. и проч. проходящая будетЪ желаемая парабола.

ТРЕТЬИМЪ ОБРАЗОМЪ.

ПринявЪ линею Ax за ось параболы, а точку A за верьхЪ оной, и соединивЪ параметрЪ AB сЪ линеею Ax, проведи пря-
Ф.41. мую линею CD такЪ, чтобЪ она Bx пересѢкала подЪ прямыми углами; потомЪ начерти по изволенію нѢсколько круговЪ, проходящихЪ чрезЪ точку B и пересѢкающихЪ ось вЪ P. P. P. и проч. ТакимЪ образомЪ AP. AP. AP. и проч. будутЪ абсциссы, а PI = AI, PII = A2, PIII = A3 и проч. семіординаты параболы (§. 267. Геом.).

ПРИБАВЛЕНІЕ.

§. 227. ИзЪ сего явствуетЪ, что всякую точку параболы можно опредѢлить геометрическимЪ образомЪ. На пр. естьли пожелаешь знать, находится ли точка M вЪ параболѢ, или нѢтЪ? То для се-
Ф.39. го изЪ точки M на линею BN опусти перпендикулЪ PM и сдѢлай PN равную параметру AB; притомЪ на линеѢ BN описавЪ полкруга, смотри, проходитЪ ли начерчен-

ченное полукружіе чрезъ точку M? Естьли проходитъ; то почитать, что та точка находится въ параболѣ (§. 267. Геом.)

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XXXVII.

§. 228. *Зажигательная точка* (focus) есть такая на оси находящаяся точка F, изъ которой проведенная семіордината FN равняется семипараметру. Или, есть такая точка, гдѣ параметръ составляетъ ординату. ф.42.

ЗАДАЧА LXXXV.

§. 229. Найти разстояніе зажигательной точки F отъ верьху A, то есть, найти AF.

РѢШЕНІЕ

Положивъ, что AF = x, параметръ = a; то будетъ FN = $\frac{1}{2}$ a (§. 208.); слѣдовательно

$$\tfrac{1}{4} a^2 = a x \quad (\S.\ 202.)$$
$$\tfrac{1}{4} a = x$$

То есть, въ параболѣ разстояніе AF зажигательной точки F отъ верьху A есть четвертая часть параметра.

ПРИМѢЧАНІЕ 1.

§. 230. Показанная здѣсь парабола обыкновенно называется Аполлоніевою, для того что изъ древнихъ онъ одинъ писалъ о ней основательнѣе.

ПРИМѢЧАНІЕ. 2

§. 231. Въ параболѣ квадраты ординатъ содержатся между собою, какъ абсциссы; а параметръ къ суммѣ двухъ половинныхъ ординатъ содержится, какъ разность ихъ къ разности абсциссъ.

ПРИМѢЧАНІЕ. 3

§. 232. Прямая линея FM проведенная изъ зажигательной точки F параболы къ концу ординаты равна суммѣ, состоящей изъ абсциссы и изъ разстоянія зажигательной точки отъ верьху.

ПРИМѢЧАНІЕ. 4

§. 233. Простѣйшій способъ для начерченія параболы есть слѣдующій:

Ф.43. 1. въ какомъ нибудь треугольникѣ, на пр. BCD раздѣливъ основаніе BD въ точкѣ E на двѣ равныя части, возставь перпендикулярную линею CE, и чрезъ точку D проведи съ нею параллельную не определенной длины.

2. Раздѣливъ половину основанія ED на нѣсколько равныхъ частей, возставь изъ точекъ раздѣленія столькожъ перпендикуловъ.

3. Бокъ BC треугольника продолжи до тѣхъ поръ, пока онъ не пересѣчетъ линеи, чрезъ точку D проведенной.

4.

4. Потомъ линею, изъ точки D проведенную и опредѣленную чрезъ бокъ BC раздѣливъ на столькожъ равныхъ частей, на сколько раздѣлена половина основанія, изъ точки B къ онымъ раздѣленіямъ проведи прямыя линеи, которыя, пересѣкая перпендикулярныя, на половинѣ основанія возставленныя, покажутъ точки сѣченія, чрезъ кои проведенная кривая линея CD будетъ парабола. См. Кн. 1. Предлож. 51. Конич. Сѣчен. Михаила де Шале.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XXXVIII.

§. 234. *Эллипсисъ* (Ellipsis), или *овальная* (ovalis) есть такая кривая линея, въ которой квадратъ семіординаты MP къ прямоугольному четвероугольнику, происшедшему изъ умноженія отрѣзковъ оси AP и PB содержится, какъ параметръ къ оси. Ф. 37.
То есть, естьли AB $=$ a, параметръ $=$ b; PM $=$ y, AP $=$ x; то будетъ $b : a = y^2 : ax - x^2$; и потому $ay^2 = abx - bx^2$

ЗАДАЧА LXXXVI.

§. 235. Найти свойство эллипсиса.

РѢШЕНІЕ.

Принявъ за поперешникъ эллипсиса Aa, а за параметръ AL, приложи къ крайнимъ Ф. 44.
поперешника точкамъ линѣйки AK и aO, дви-

движущіяся около точекъ A и a, и естьли сѣченіе линѣекъ въ точкѣ M сдѣлается такъ, что будетъ AO = LN, или разстояніе линѣйки aO отъ верьху A будетъ равно перпендикулу, изъ крайней параметра точки L на линѣйку AK опущенному; то точка M будетъ находиться въ эллипсисѣ. Положивъ, что AL = p, Aa = a, AP = x, ap = a — x, PM = y, LN = m; то, поелику $\triangle$ ALN $\sim$ $\triangle$ APM, будетъ имѣть мѣсто слѣдующая пропорція:

$$AL, LN = PM : AP$$

$$p : m = y : x$$

$$px = my$$

$$\frac{px}{y} = m$$

И поелику $\triangle$ Aa O $\sim$ $\triangle$ Pa M, будетъ

$$Aa : AO = aP : PM$$

$$a : m = a - x : y$$

$$ay = ma - mx$$

$$\frac{ay}{a-x} = m$$

И потому $$\frac{ay}{a-x} = \frac{px}{y}$$

$$ay^2 = apx - px^2$$

$$y^2 = px - \frac{px^2}{a}$$

То

То есть, въ эллипсисѣ крадратъ семіординаты равенъ прямоугольному четвероугольнику, произшедшему изъ умноженія параметра на абсциссу, безъ другаго прямоугольнаго четвероугольника, произшедшаго изъ умноженія тойже абсциссы на четвертую пропорціональную линею къ поперешнику, параметру и абсциссѣ. На пр.

$a : p = x : \frac{px}{a}$

ПРИБАВЛЕНІЕ 1.

§. 237. Поелику $y^2 : ax - x^2 = p : a$; то явствуетъ изъ сего, что въ эллипсисѣ квадратъ семіординаты къ прямоугольному четвероугольнику, произшедшему изъ отрѣзковъ поперешника, содержится, какъ параметръ къ поперешнику.

ПРИБАВЛЕНІЕ 2.

§. 238. И такъ въ эллипсисѣ меньшая ось ED есть средняя пропорціональная линея между большею осью AB и параме- Ф. 31
метромъ. Слѣдовательно параметръ есть третья пропорціональная линея къ большей и меньшей оси. Ибо, естьли $x = \frac{1}{2}a$, будетъ $y^2 = \frac{1}{2}ab - a^2b : 4a = \frac{1}{4}ab$; слѣдовательно $y = CD = \sqrt{\frac{1}{4}ab}$. Почему $DE = 2\sqrt{\frac{1}{4}a} = \sqrt{ab}$.

ЗАДА-

ЗАДАЧА LXXXVII.

§. 239. Найти въ эллипсисѣ ось AB,
ф.45. когда будутъ даны въ оной параметръ, перпендикулярной къ оси AL, абсцисса AP, и семіордината PM.

РѢШЕНІЕ.

1. Сдѣлавъ AN = AQ = PM, проведи NF параллельно съ LQ; то будетъ AF = $y^2 : b$, слѣдовательно NF = $x - y^2 : b$.

2 Продоливъ LA до G и сдѣлавъ AH = FP, AG = AP, проведи GB параллельно съ HP; то будетъ AB = $bx^2 : (bx - y^2)$, то есть, искомая ось.

ЗАДАЧА LXXXVIII.

§. 240. Найти въ Эллипсисѣ параметръ
ф.46. AG; когда будутъ даны въ оной ось AB, абсцисса AP и семіордината PM.

РѢШЕНІЕ.

1. Сдѣлавъ AI = PM, изъ A чрезъ M проведи прямую линею AL.

2. Въ точкѣ I возставь перпендикулъ LI; то, по причинѣ AP:PM = AI:LI (§. 206. Геом.), будетъ LI = $y^2 : x$.

3. Продолживъ PM до O такъ, чтобъ было PO = LI = $y^2 : x$, изъ B чрезъ O проведи прямую линею BG.

4. Въ A возставь перпендикулъ GA; то, по причинѣ BP : PO = BA : GA, будетъ GA

ay^2:

$= ay^2 : (ax - x^2)$, то есть, искомой параметрЪ.

ПРИБАВЛЕНІЕ.

§. 241. Когда $x = AC = \frac{1}{2} a$; то изЪ сего происходитЪ слѢдующая пропорція: Ф. 47.
$y^2 : \frac{1}{4}a^2 = p : a$, помощію сего величина сопряженной оси находится; ибо сравненіе изЪ вышеположенной пропорціи составляется слѢдующее:

$$ay^2 = \frac{1}{4} a^2 p$$
$$y^2 = \frac{1}{4} ap$$
$$y = \frac{1}{2} \sqrt{ap}$$
$$2y = \sqrt{ap}$$

То есть, половинная сопряженная ось BC есть половинная часть средней пропорціональной линеи между параметромЪ и поперешникомЪ; или, весь сопряженной поперешникЪ BD есть средняя пропорціональная линея между параметромЪ и поперешникомЪ. И поелику $ay^2 = ap$, то выдетЪ изЪ сего слѢдующая пропорція: $a : 2y = 2y : p$. То есть, параметрЪ p есть третья пропорціональная линея кЪ поперешнику и сЪ нимЪ сопряженному поперешнику $2y$.

ЗАДАЧА LXXXIX.

§. 242. Начертить эллипсисЪ, или овальную фигуру.

РѢШЕ-

РѢШЕНІЕ.

ф. 48. 1. Поелику въ эллипсисѣ $y^2 = \frac{apx - px^2}{a}$; то будетъ $y = \sqrt{\frac{apx - px^2}{a}}$: но какъ изъ сего сравненія можно вывести слѣдующую пропорцію: $x : p = x \frac{px}{a}$; то

2. Между $\frac{px}{a}$ и $a - x$ должно сыскать среднюю пропорціональную линею, или семіординату, взятой абсциссѣ соотвѣтствующую.

3. Для сысканіяжъ большаго числа семіординатъ, къ поперешнику Aa приложи подъ прямымъ угломъ параметръ AL, и начертивъ ипотенузу La, въ треугольникѣ AaL проведи нѣсколько перпендикулярныхъ линей PR, pr и проч. которыя будутъ четвертыя пропорціональныя линеи къ Aa, AL и aP. Или ap.

4. Потомъ между сими четвертыми пропорціональными линеями и $a - x$, или AP, Ap, найди среднія пропорціональныя линеи, которыя покажутъ, какія семіординаты должно наложить на абсциссы, чрезъ крайнія точки коихъ проведенная кривая линея будетъ эллипсисъ.

Дру-

другимЪ образомЪ

1. ВЪ центрѢ А, раствореніемЪ циркула АВ, начерти кругЪ BCD.

2. ТѢмже раствореніемЪ циркула, изЪ какой нибудь точки, на окружности начерченнаго круга взятой, начерти другой кругЪ, которой чрезЪ центрЪ перваго проходя, вЪ двухЪ мѢстахЪ пересѢчетЪ оной. Ф. 49.

3. Центры и сѢченія соедини прямыми линеями CAD и EBF, которыя вЪ F или C на окружности круга покажутЪ точку для растворенія циркула изЪ противоположеннаго круговЪ сѢченія, изЪ коихЪ сѢченій естьли чрезЪ найденныя точки дополнятся дуги, сливающіяся сЪ окружностьми круговЪ; то произойдетЪ ЭллипсисЪ, или овальная фигура.

МеханическимЪ образомЪ

1. ВыбравЪ по изволенію двѢ точки на какой нибудь плоскости, вЪ оныхЪ вколоти по гвоздю.

2. Около тѢхЪ гвоздей обведя произвольной длины веревку, концами связанную, и заложивЪ за оную что нибудь остроконечное, черти онымЪ вкругЪ; то и начертится овальная фигура.

ПРИМѢЧАНІЕ.

§. 243. Помянутая веревка, по различію точекъ, взятыхъ по изволенію, какъ центровъ, различную и овальную фигуру описывать можетъ. Ибо чѣмъ ближе центры будутъ другъ къ другу, тѣмъ ближе и фигура описываемая будетъ подходить къ кругу, чѣмъ же далѣе напротивъ того будутъ отстоять другъ отъ друга центры, тѣмъ и фигура продолговатѣе, или овальнѣе начертится, такъ что ежели тѣ центры соединятся; то уже въ такомъ случаѣ не овальная фигура, но совершенной кругъ произойдетъ.

ЗАДАЧА XC.

Ф.47. §. 244. Найти въ Эллипсисѣ разстояніе зажигательной точки отъ верьху.

РѢШЕНІЕ.

Когда MN есть параметръ, а F зажигательная точка Эллипсиса; то будетъ

$$\tfrac{1}{4} p^2 = px - \frac{4x^2}{a} \quad (\S.\ 198.\ и\ 208.)$$

$$\tfrac{1}{4} ap^2 = apx - px^2$$

$$\tfrac{1}{4} ap = ax - x^2$$

И поелику извѣстно, что AF гораздо меньше, нежели AC; то надлежитъ сдѣлать обрат-

обратное сравненіе, такъ чтобъ было $x^2 - ax$, то есть,

$$x^2 - ax = -\frac{1}{4}ap$$

$$\frac{1}{4}a^2 - ax + x^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ap$$ допол. непол. квад.

$$\frac{1}{2}a - x = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ap.)}$$

Когдажъ приложишь x, и извлечешь квадратной радиксъ; то будетъ

$$\frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ap)} = x = AF$$

То есть, составь радиксъ, сыскавъ среднюю пропорціональную линею между $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}p$ и $\frac{1}{1}a$, которая будетъ FC, и оную вычти изъ половинной оси AC, получишь AF искомое разстояніе зажигательной точки отъ верьху.

ЗАДАЧА XCI.

§. 245. Найти величину линей BF и Bf, которыя изъ двухъ зажигательныхъ точекъ Эллипсиса проведены къ крайней точкѣ сопряженнаго поперешника BD. Ф.47.

РѢШЕНІЕ.

Когда выше сего сказано, что FC и fC $= \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ap}$ (§. 223.), также выше сего показано, какъ находить половинной меньшей поперешникъ BC $= \frac{1}{2}\sqrt{ap}$ (§. 220.); то, въ силу Пиѳагоровой Теоремы, будетъ

$$FC^2 + BC^2 = BF^2$$

$$\frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{4} ap + \frac{1}{4} ap = BF^2$$

$$\text{или } \frac{1}{4} a^2 = BF^2$$

$$\frac{1}{2} a = BF$$

И поелику $BF = Bf$; то видно, что линеи изъ зажигательныхъ точекъ къ крайней точкѣ меньшей оси Эллипсиса проведенныя, вмѣстѣ взятыя, равняются большей оси.

ПРИБАВЛЕНІЕ.

§. 246. Тоже самое и о другихъ всякихъ линеяхъ, кои изъ двухъ зажигательныхъ точекъ къ точкамъ, на окружности Эллипсиса находящимся, проводятся, можно доказать.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XXXIX.

ф.36. §. 247. *Ипербола* (Hyperbola) есть такая кривая линея, въ которой $ay^2 = abx + bx^2$, то есть, $b : a = y^2 : ax + x^2$, или, квадратъ семіординаты къ прямоугольному четвероугольнику, произшедшему изъ умноженія абсциссы на прямую, сложенную изъ тойже абсциссы и нѣкоторой прямой неперемѣняемой линеи, которая *поперечною осью*, или *поперечнымъ бокомъ* (axis transversus, vel latus transversum) называется, содержится такъ, какъ другая прямая не-

непеременяемая линея, именуемая *параметръ оси* (parameter axis), къ поперечной оси.

ПРИБАВЛЕНІЕ 1.

§. 248. Слѣдовательно и здѣсь, какъ въ Эллипсисѣ, будетъ $y^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$, $b = ay^2 : (ax + x^2)$, $a = bx^2 : (y^2 - bx)$ и проч. только съ тою отмѣною, что здѣсь противные находятся знаки.

ПРИБАВЛЕНІЕ 2.

§. 249. Изъ чего явствуетъ, что въ Иперболѣ, такъ какъ и въ Эллипсисѣ, сопряженною осью почитается средняя пропорціональная линея между поперечною осью и параметромъ.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XL.

§. 250. Ежели поперечная ось AB съ осью AX соединяется въ прямой линеѣ и въ C раздѣляется на двѣ части; то точка C называется *центромъ* (centrum).

ЗАДАЧА XCII.

§. 251. Найти въ Иперболѣ разстояніе AF зажигательной точки F отъ верьху AF; когда въ оной будутъ даны параметръ и поперечная ось AB.

РѢШЕНІЕ.

ПоложивЪ, что параметрЪ $=b$, AB $=a$; то будетЪ FN $=\frac{1}{2}b$.

$$b : a = \frac{1}{4}b^2 : ax + x^2$$
$$\frac{1}{4}ab^2 = abx + bx^2$$
$$\frac{1}{4}ab = ax + x^2$$
$$\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}ab = \frac{1}{4}a^2 + ax + x^2$$
$$\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}ab)} = \frac{1}{2}a + x$$
$$\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}ab}) - \frac{1}{2}a = x$$

То есть находится x, сыскавЪ между $\frac{1}{2}a$ и $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ среднюю пропорціональную линею и отнявЪ отЪ того $\frac{1}{2}a$. Или, поелику $\sqrt{\frac{1}{4}ab} =$ CE (§. 228.), сдѢлавЪ AG $=$ CE, будетЪ GC $= \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}ab)}$. Почему, когда AC $= \frac{1}{2}a$, изЪ центра C полупоперешникомЪ CG начерти дугу GF, пересѢкающую ось вЪ F, будетЪ AF $= \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}ab)} - \frac{1}{2}a$; слѢдовательно вЪ F будетЪ зажигательная точка.

ф. 50. ЗАДАЧА XCIII.

§. 252. Найти свойство Иперболы.

РѢШЕНІЕ.

ПринявЪ за поперечную ось Aa, двѢ линѢйки подвижныя, кЪ крайнимЪ оной оси точкамЪ приложенныя двигай такЪ, чтобЪ, по положеніи параметра AL, сдѢлалось AK $=$ LN.

LN. По учиненіи сего, произойдутъ подобные треугольники, то есть, $\triangle ALN \sim \triangle APN$, и потому

$$AL : LN = PM : AP$$
$$p : m = y : x$$
$$px = my$$
$$\frac{px}{y} = m$$

Также, по причинѣ подобныхъ треугольниковъ AaK и aPM, будетъ

$$Aa : AK = aP : PM$$
$$a : m = a + x : y$$
$$ay = ma + mx$$
$$\frac{ay}{ax} = m$$

И такъ $\frac{ay}{ax} = \frac{px}{y}$

$$ay^2 = apx + px^2$$
$$y^2 = px + \frac{px^2}{a}$$

То есть, въ Иперболѣ квадратъ семіординаты y^2 равняется прямоугольному четвероугольнику, произшедшему изъ умноженія абсциссы на параметръ px, приложивъ потомъ къ тому другой прямоугольной четвероугольникъ, произшедшей изъ умноженія абсциссы на четвертую пропор-

ціональную линею къ поперешнику, параметру и абсциссѣ.

ПРИБАВЛЕНІЕ 1.

§. 253. Для сысканіяжъ въ Иперболѣ семіординатъ, поелику $y = \sqrt{\left(\frac{apx + px^2}{a}\right)}$, надлежитъ сперьва найти четвертыя пропорціональныя линеи $\frac{px}{a}$ чрезъ слѣдующую пропорцію, $a : p = x : \frac{px}{a}$, потомъ среднія пропорціональныя линеи между $\frac{px}{a}$ и $a + x$.

ПРИБАВЛЕНІЕ 2.

§. 254. Какъ въ Эллипсисѣ сумма линей,
Ф 51. кои изъ двухъ зажигательныхъ точекъ проводятся къ какимъ нибудь точкамъ, на окружности находящимся, равняется большей оси; такъ и въ Иперболѣ напротивъ того разность линей, кои изъ зажигательныхъ точекъ проводятся къ какой нибудь точкѣ Иперболы, равняется поперешнику Aa.

ЗАДАЧА. XCIV.

Ф 52. §. 255. Начертить Иперболу.

РѢШЕ-

РѢШЕНІЕ.

1. На прямой неопредѣленной линеѣ взявъ ось Аа, означь на оной равныя для зажигательной точки разстоянія отъ верьху, какъ значитъ af и AF.

2. Въ нижней зажигательной точкѣ F, по изволенію взятымъ раствореніемъ циркула, начерти съ обѣихъ сторонъ оси дуги; раствореніежъ циркула, взятое по изволенію, тотчасъ изъ верьху А перенеси на ось внизу, такъ какъ абсциссу.

3. Потомъ смѣрявъ циркулемъ сумму поперечной оси Аа и абсциссы АР, или смѣрявъ линею аР и поставивъ одну ножку циркула въ верьхней зажигательной точкѣ f, пересѣки съ обѣихъ сторонъ тѣмъ раствореніемъ нижнія назначенныя дуги, и естьли много такихъ дугъ, взаимно другъ друга пересѣкающихъ изъ верьхней и нижней зажигательной точки проведено будетъ, то изъ верьху А чрезъ точки сѣченій М означится Ипербола.

Другимъ образомъ

1. Сдѣлавъ АВ равно поперечной оси, означь зажигательныя точки f и F. Ф.53.

2. Соединивъ съ fO прямую линею fK подъ какимъ нибудь острымъ угломъ, изъ центра f полупоперешниками, взятыми

 боль-

больше, нежели fA, начерти нѣсколько дугъ, изъ одного и тогожъ центра пересѣкающихъ прямую линею fK въ точкахъ I. II. III. и проч.

3. Сдѣлавъ FL = AB, изъ зажигательной точки F раствореніями LI. LII. LIII. и проч. пересѣки съ обѣихъ сторонъ тѣ дуги въ точкахъ 1. 2. 3. и проч. то чрезъ точки 1. 2. 3. проведенная кривая линея будетъ Ипербола.

Третьимъ образомъ

1. Начерти по изволенію такой треугольникъ ABC, чтобъ оной былъ или весьма острой, или не очень острой около точки C.

Ф. 53. 2. Принявъ по изволенію за верьхъ Иперболы на пр. точку E, проведи пониже оной нѣсколько линей параллельныхъ съ основаніемъ того треугольника, и чѣмъ болѣе такихъ линей проведено будетъ, тѣмъ точнѣе начертится Ипербола. Проводить же оныя параллельныя линеи должно между боками треугольника такъ, чтобъ первая проведенная параллельная линея, на пр. FH была средняя пропорціональная между EF и FG, вторая KI средняя пропорціональная между EK и KL, AD средняя пропорціональная между EA и AB. и проч.

3.

3. Съ другой стороны поперешника AC доповнивъ тоже разстояніе параллельныхъ линей, естьли проведешь чрезъ крайнія оныхъ точки кривую линею, то она будетъ Ипербола.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XLI.

§. 256. Естьли линея MN чрезъ верьхъ D Иперболы проведена будетъ параллельная съ ординатами ея; то изъ центра A чрезъ оба той параллельной линеи концы проведенныя прямыя линеи AB и AC называются *Асимптоты* (Asymptotae). Ф. 54.

ПРИМѢЧАНІЕ 1.

§. 257. Изъ многихъ равнымъ образомъ пересѣкающихъ конусъ линей, на поверьхности онаго произошли сіи, кои, послѣдуя Аполлонію, новѣйшіе назвали Параболою, Иперболою и Эллипсисомъ; то есть, Парабола, или *линея равенства* (linea aequalitatis) потому названа такимъ именемъ, что въ оной $px = y^2$; Эллипсисъ, или *линея недостаточества* (linea defectus) потому, что въ оной $px - \frac{px^2}{a} = y^2$, а Ипербола, или *линея излишества* (linea excessus) потому, что въ оной $px + \frac{px^2}{a} = y^2$. Древніежъ

Мате-

Математики называли такія линеи сѢченіями конуса прямоугольнаго, тупоугольнаго и остроугольнаго.

ПРИМѢЧАНІЕ 2.

§. 258. КромѢ вышепоказанныхЪ кривыхЪ линей, произшедшихЪ изЪ сѢченія конуса, суть еще другія, которыя происходятЪ изЪ непрерывнаго движенія какой нибудь точки. На пр. ЦиклоисЪ, КонхоисЪ, КвадратриксЪ и Спиральная линея.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XLII.

§. 259. *Циклоисъ*, или *Трохоисъ* (Cycloiѕ, uel Trochois) есть такая кривая линея AB, ко-
ф. 55. торая происходитЪ изЪ обращенія круга APHN на прямой линеѢ BC, то есть, изЪ движенія точки A, на окружности круга находящейся, такЪ что та точка при началѢ движенія на концѢ B, при окончаніижЪ онаго движенія на концѢ C той прямой линеи BC находится. Или ЦиклоисЪ происходитЪ изЪ того, когда кругЪ на прямой линеѢ BC двигается до тѢхЪ порЪ, пока весь не оборотится, то есть, когда находящаяся на поверьхности его точка A опять не придетЪ вЪ самой низЪ.

ПРИБАВЛЕНІЕ 1.

§. 260. ИзЪ чего явствуетЪ, что при такомЪ обращеніи круга какЪ бы вся его

окружность распростиралась въ прямую линею BC, и потому полкруга APH = BH.

ПРИБАВЛЕНІЕ 2.

§. 261. И такъ BF = четверти круга MF и MD = четверти круга AP = FH = MP, потому что ME = PG.

Слѣдовательно прямыя линеи отъ дуги Циклоиса BMA къ окружности APH проведенныя параллельно съ основаніемъ BH почитаются равными круга производителя дугѣ AP.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ XLIII.

§. 262. *Конхоисъ* (conchois), или *Конхилисъ* (conchilis), Никомедомъ изобрѣтенная, есть такая кривая линея, которая происходитъ изъ того, когда на прямой управляющей линеѣ DE другая прямая линея AC около точки C будетъ двигаться такимъ образомъ, что движимой линеи частицы FD и GE, по верьхъ управляющей линеи оказывающіяся, будутъ всегда равны между собою. Ф. 56.

ПРИМѢЧАНІЕ 1.

§. 263. Точка C, около которой двигается прямая линея AC, называется *Полюсъ* (Polus).

ПРИМѢ-

ПРИМѢЧАНІЕ 2.

§. 264. Чѣмъ наклоненнѣе движимая линея АС будетъ имѣть свое положеніе къ управляющей линеѣ, тѣмъ частицы GE и FD ближе къ ней будутъ наклонятъся; однако никогда не могутъ упасть на оную, но всегда поверьхъ ея должны оказываться. И такъ Конхоисъ хотя мало по малу и подходитъ близко къ управляющей линеѣ, такъ что разстояніе между ими нечувствительно малое бываетъ, токмо никогда съ нею не соединяется; почему и называется *Асимптота* (ἀσύμπτωτος).

ОПРЕДѢЛЕНІЕ. XLIV.

Ф 57. §. 265. Когда на концѣ поперешника AB полкруга AOB возставивъ перпендикулъ неопредѣленной длины BC, проведешь прямую линею AH, и сдѣлаешь AM = IH, или LC = AN; то чрезъ точки M и L проведенная кривая линея AMOL, отъ Діоклеса изобрѣтенная, называется *Циссоисъ* (Cissois).

ОПРЕДЕЛѢНІЕ XLV.

Ф 60. §. 266. Ежели прямая линея AX раздѣлится на нѣсколько равныхъ частей и изъ раздѣленія точекъ A. P. p и проч. будутъ означены прямыя линеи AN, PM, pm и

и проч. непрерывно пропорцiональныя; то чрезъ точки N, M, m и проч. проведенная кривая линея называется *Логистика* (Logiſtica), также *Логариѳмика* (Logarithmica).

ОПРЕДѢЛЕНIЕ XLVI.

§. 267. Ежели четверть круга ANB въ точкахъ N и n, и проч. поперешникъ его AC въ точкахъ P и p и проч. раздѣливъ на нѣсколько равныхъ частей, проведешь полупоперешники CN, cn и проч. а изъ точекъ P и p. возставишь перпендикулы PM, pm и проч. то чрезъ точки M и m, и проч. проведенная кривая линея, отъ Диностраша изобрѣтенная, называется *квадратриксъ* (quadratrix, ſeu Τετραγωνίζουσα). Ф.58.

ПРИБАВЛЕНIЕ.

§. 268. И такъ въ разсужденiи квадратриксы имѣетъ мѣсто слѣдующая пропорцiя:

$$AB : AN = AC : AP$$

То есть, ежели положить, что AB $= a$, AC $= b$, AN $= x$, AP $= y$; то будетъ $ay = bx$.

ОПРЕДѢЛЕНIЕ XLVII.

§. 269. Когда окружность круга APpA и его полупоперешникъ AC раздѣливъ на нѣсколь- Ф.59.

сколько равныхъ частей, сдѣлаешь CM равно одной части, а Cm двумъ частямъ и проч. полупоперешника; то кривая линея чрезъ точки M. m. m и прч. проведенная, отъ Архимеда изобрѣтенная, называется *спиральная* (Spiralis), или *Геликсъ* (Helix), или *Улиткопая*.

ПРИБАВЛЕНІЕ.

§. 270. И такъ въ разсужденіи спиральной линеи имѣетъ мѣсто слѣдующая пропорція:

$$AP : APpA = CM : CA$$

То есть, ежели положить, что $APpA = p$, $AC = r$, $AP = x$, $PM = y$; то будетъ $CM = r - y$, и по причинѣ того, что $p : r = x : r - y$, будетъ также $pr - py = rx$.

ЗАДАЧА XCV.

ф.55. §. 271. Найти свойство Циклоиды.

РѢШЕНІЕ.

Принявъ полупоперешникъ APH за линею абсциссъ, и назвавъ $AP = x$, $PM = y$; $APH = c$, $BH = d$, будетъ имѣть мѣсто слѣдующая пропорція:

APH

$$APH : BH = AP\ PM$$
$$c : d = x : y$$
$$dx = cy$$

По поелику $c = d$; то будетЪ

$$x = y$$

ЗАДАЧА XCVI.

§. 272. Найти свойство Квадратриксы.

РѢШЕНІЕ.

ПоложивЪ, что четверть круга ANB ф. 58. $= a$; $nB - x$, $AC = r$, $pc = md = y$; то будетЪ имѢть мѢсто слѢдующая пропорція:

$$AB : nB = AC : mD$$
$$a : x = r : y$$
$$ay = rx$$

То есть, вЪ квадратриксѢ произведеніе четверти круга на синусЪ квадратриксы равняется прямоугольному четвероугольнику, произшедтему изЪ умноженія полупоперешника на частицу четверти круга, противоположенной синусу квадратриксы.

ПРИБАВЛЕНЕ.

§. 273. СлѢдовательно $\frac{ay}{r} = x$, то есть, вЪ квадратриксѢ всякая часть четверти круга есть четвертая пропорціональная линея, кЪ полупоперешнику, чет-

 верти

верти круга и синусу квадратриксы найденная.

ПРИМѢЧАНІЕ 1.

§. 274. Поелику какъ для Циклоиды, такъ и для Квадратриксы не можно составить сравненія чрезъ сношеніе однихъ токмо прямыхъ линей; но частицы кривой линеи всегда вмѣшиваются въ оное; то видно, что съ такимъ сравненіемъ труднѣе обходиться: и потому такія кривыя линеи имѣютъ отмѣнное свойство отъ круга и тѣхъ кривыхъ линей, кои происходятъ изъ сѣченія конуса. Почему Лейбницій однѣ кривыя линеи Геометрическими и Алгебраическими, а другія Механическими называетъ. То есть, кривыя Геометрическія и Алгебраическія линеи суть, коихъ свойство объясняется такимъ сравненіемъ, которое не требуетъ никакой квадратуры кривой линеи, какія на пр. суть кругъ и линеи произшедшія изъ сѣченія конуса, то есть, Парабола, Ипербола и Эллипсисъ. Механическіяжъ кривыя линеи суть, кои объясняются чрезъ такое сравненіе, въ которое входитъ квадратура другой кривой линеи, какія на пр. суть Циклоисъ, Квадратриксъ и проч.

ПРИМѢЧАНІЕ 2.

§. 275. Прочія предложенія, принадлежащія суда, на пр. о свойствѣ и разныхъ премѣненіяхъ сравненій, о Геометрическихъ мѣстахъ, о составленіи кубическихъ и биквадратическихъ сравненій и проч. оставляются; поелику оныя требуютъ пространнѣйшаго объясненія. Почему желающій имѣть понятіе и о такихъ предложеніяхъ, можетъ почерпнуть оныя изъ другихъ нарочно и пространно о томъ объясняющихъ писателей.

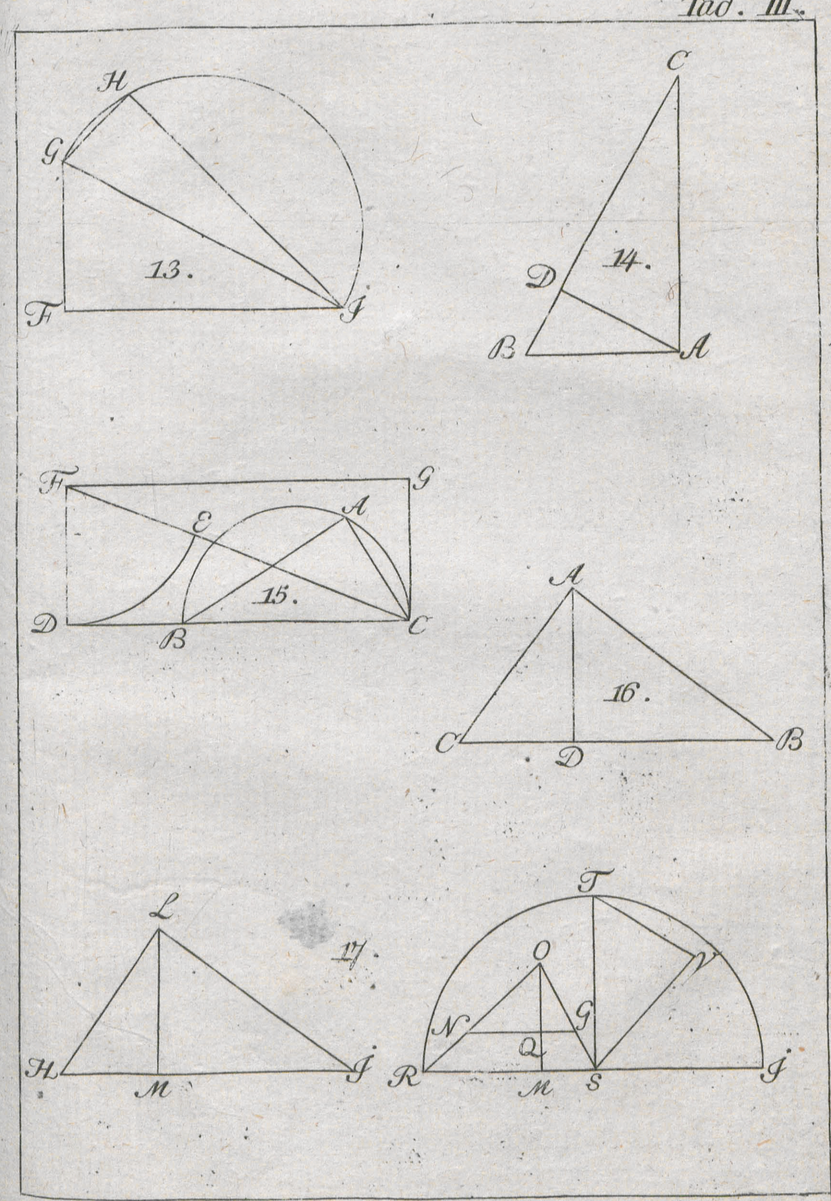
КОНЕЦЪ.



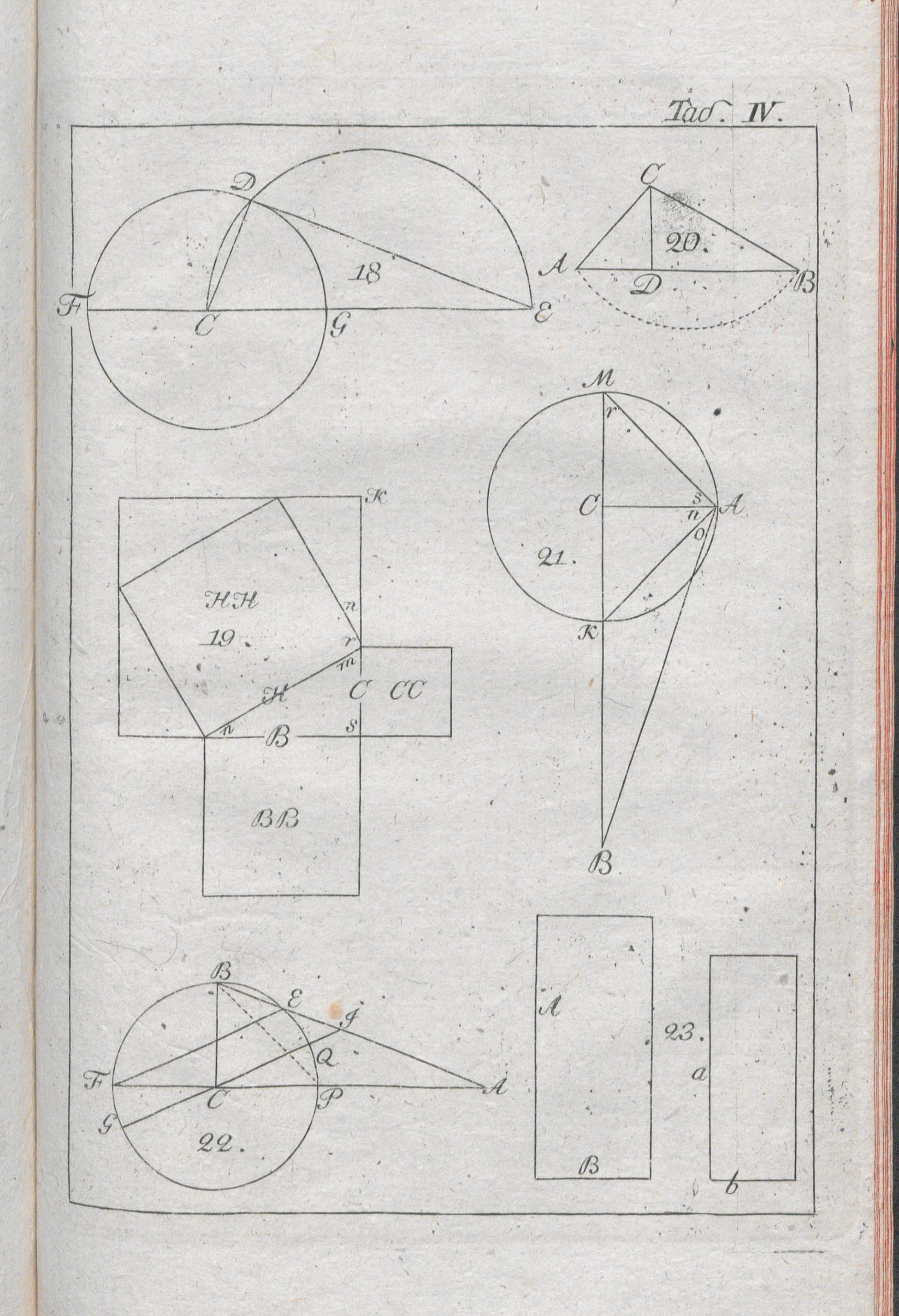
Фигуры Алгебраическія

Tab. II.

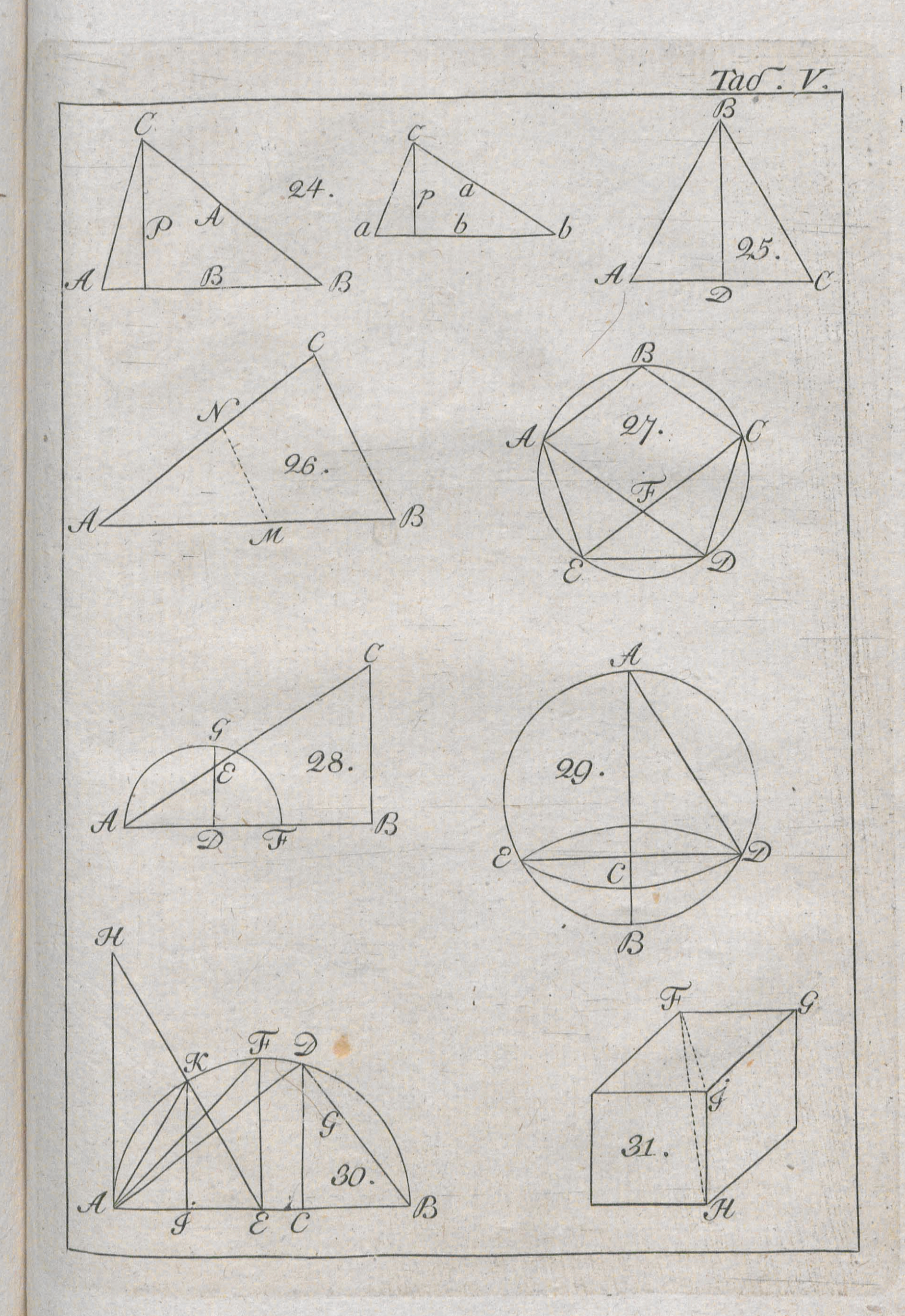
Tab. III.

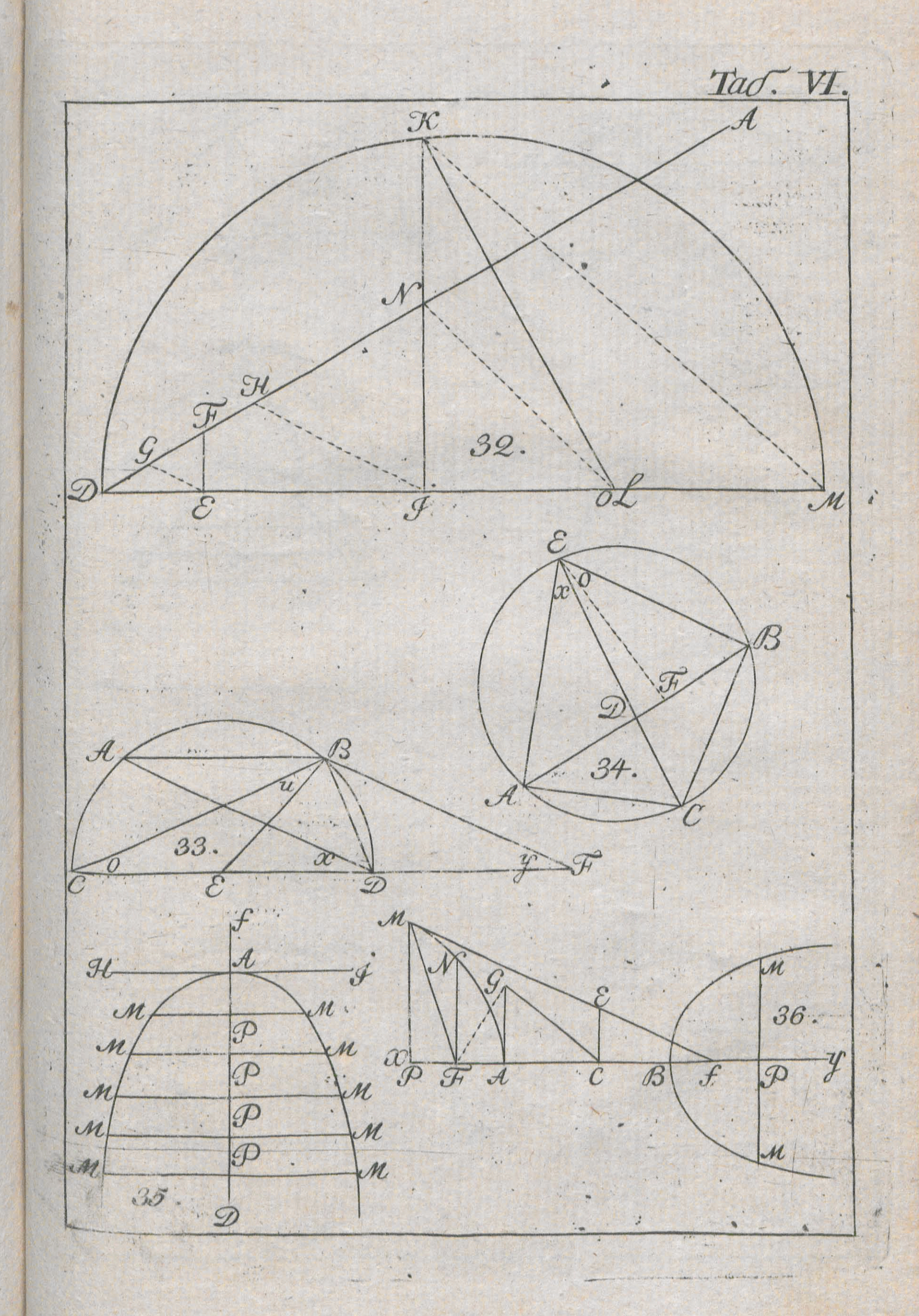


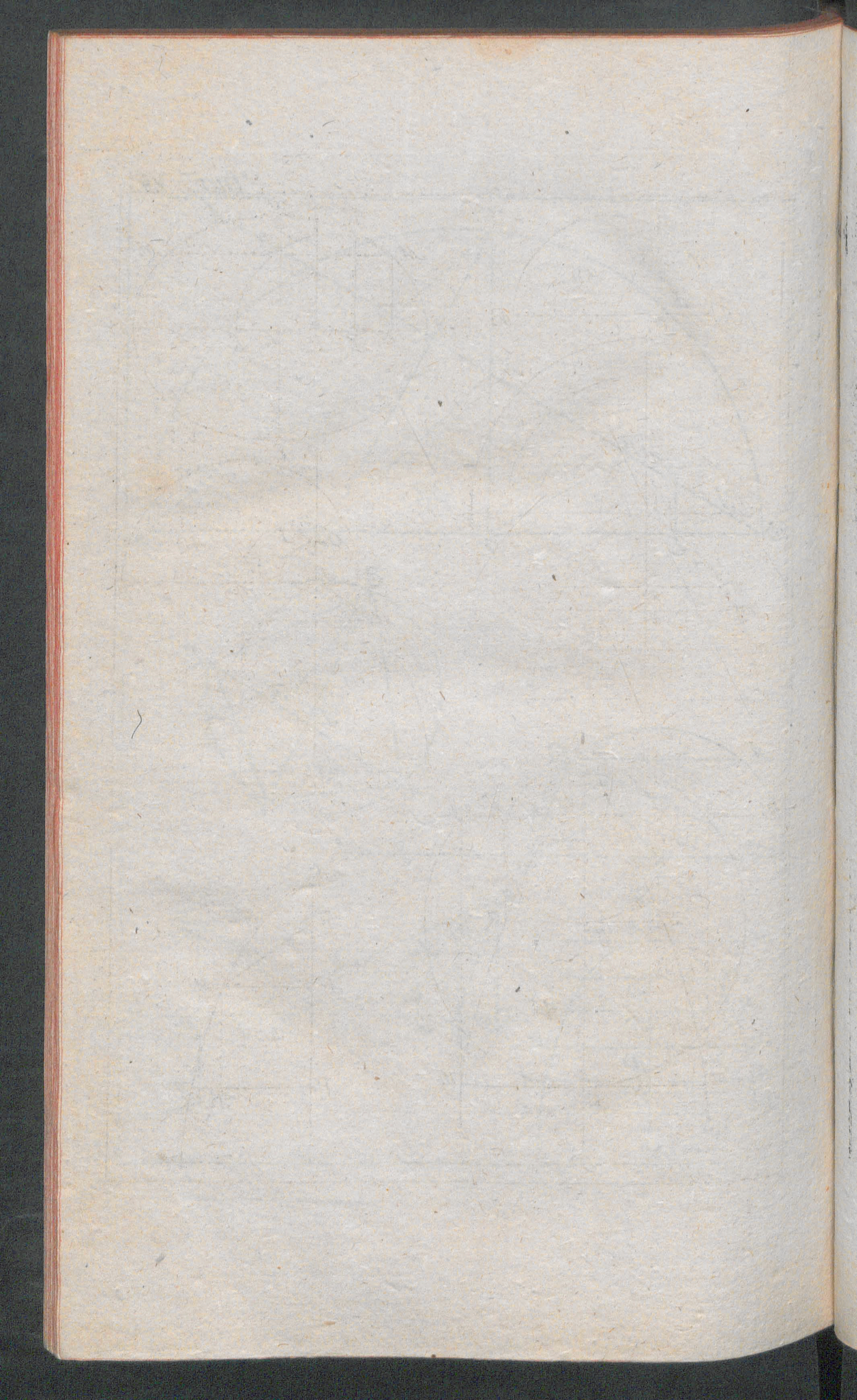
Tab. IV.



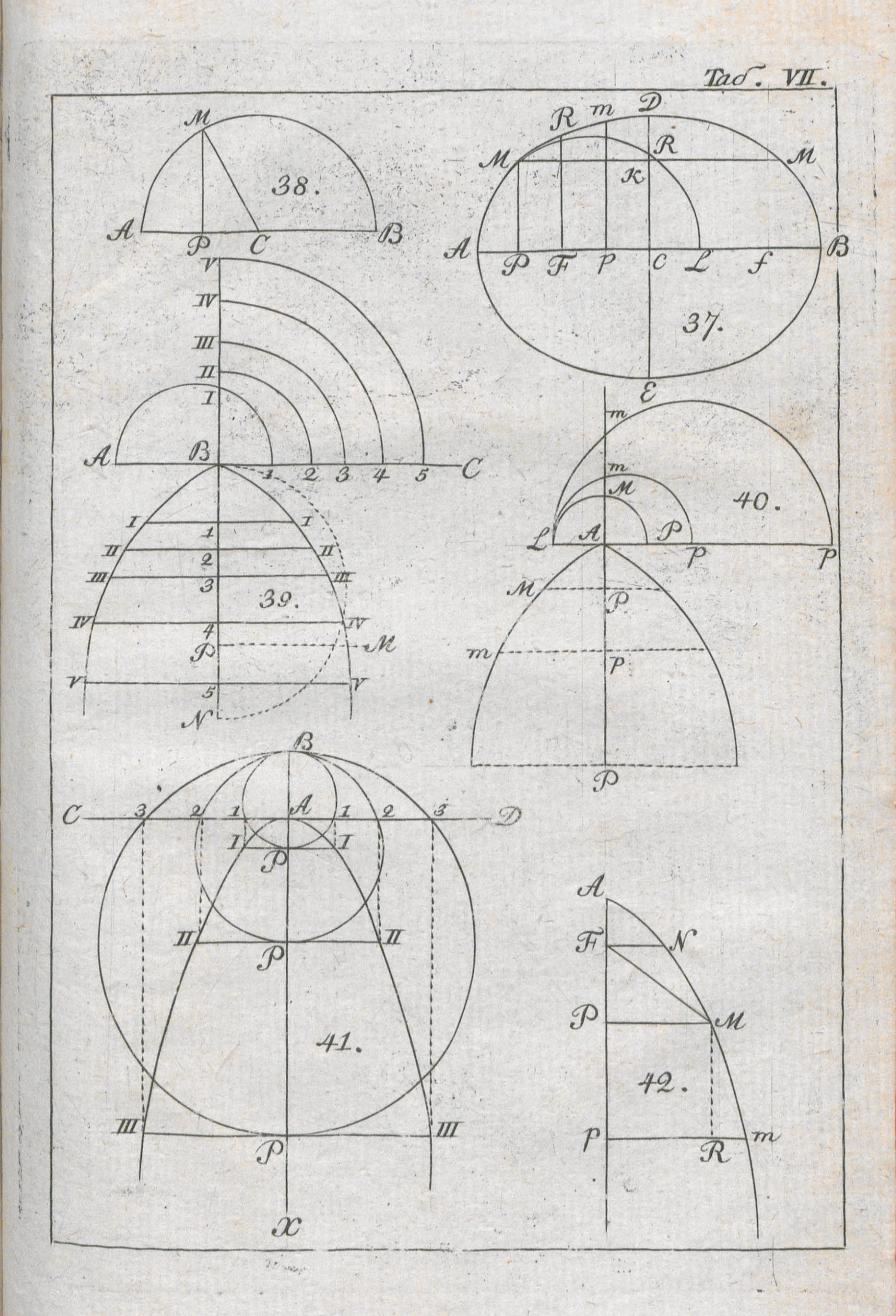
D
18
F
C
G
E
C
20.
A
D
B
M
r
C
s
A
n
o
21.
K
B
K
HH
n
19.
r
m
H
C
CC
n
B
s
BB
B
E
J
F
Q
A
C
P
G
22.
A
23.
a
B
b


Tab. V.
C
24.
P
A
A
B
B
c
p
a
a
b
b
B
25.
A
D
C
C
N
26.
A
M
B
B
27.
A
C
F
E
D
C
G
E
28.
A
D
F
B
A
29.
E
D
C
B
H
K
F
D
G
30.
A
I
E
C
B
F
G
I
31.
H

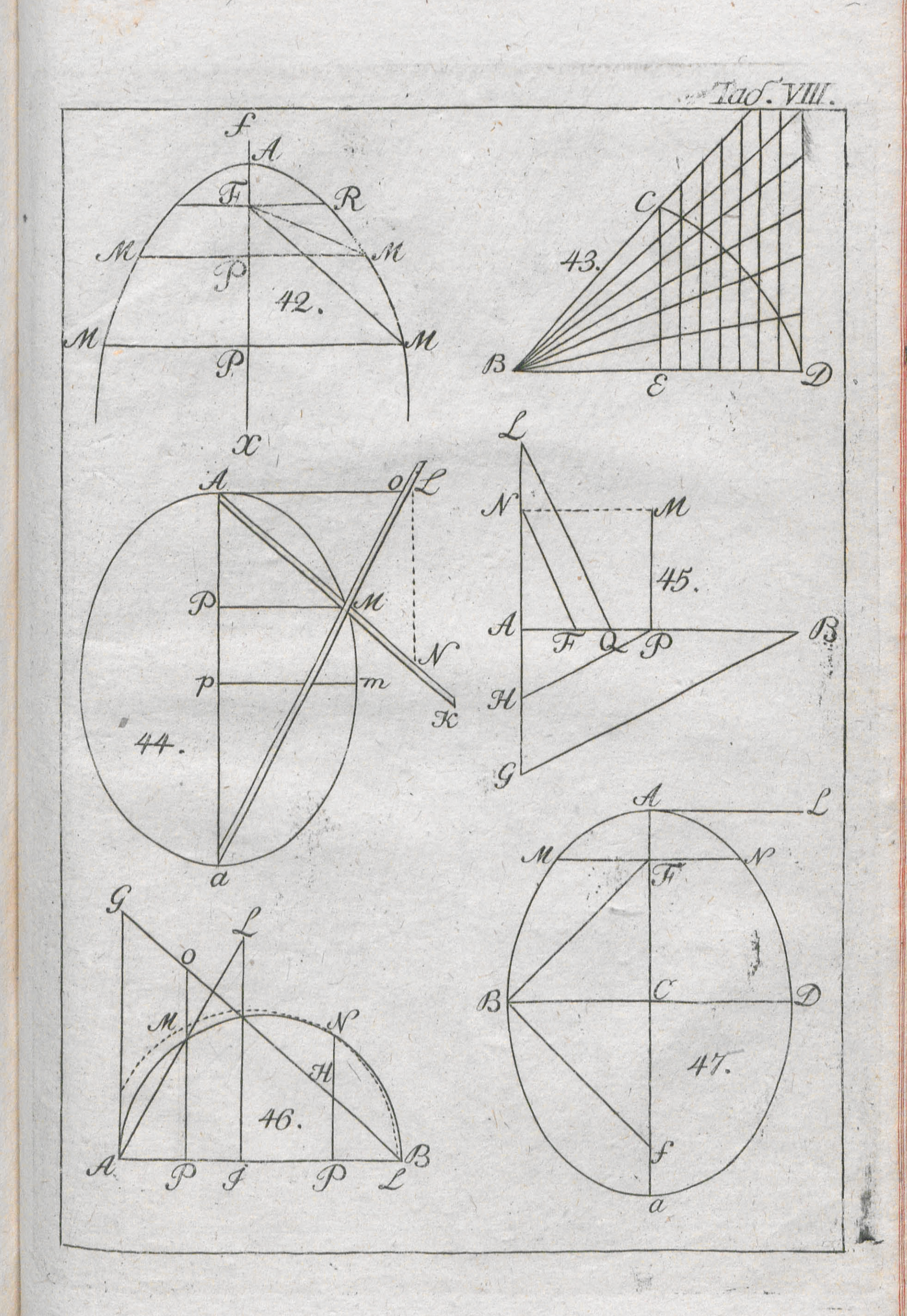

K
A
N
H
F
G
32.
D
E
J
oL
M
E
x
o
B
F
D
34.
A
C
A
B
u
33.
o
x
C
E
D
y
F
f
A
H
J
M
M
P
M
M
P
M
M
P
M
M
P
M
M
M
35.
D
M
N
G
E
36.
x
P
F
A
C
B
f
P
y
M
M



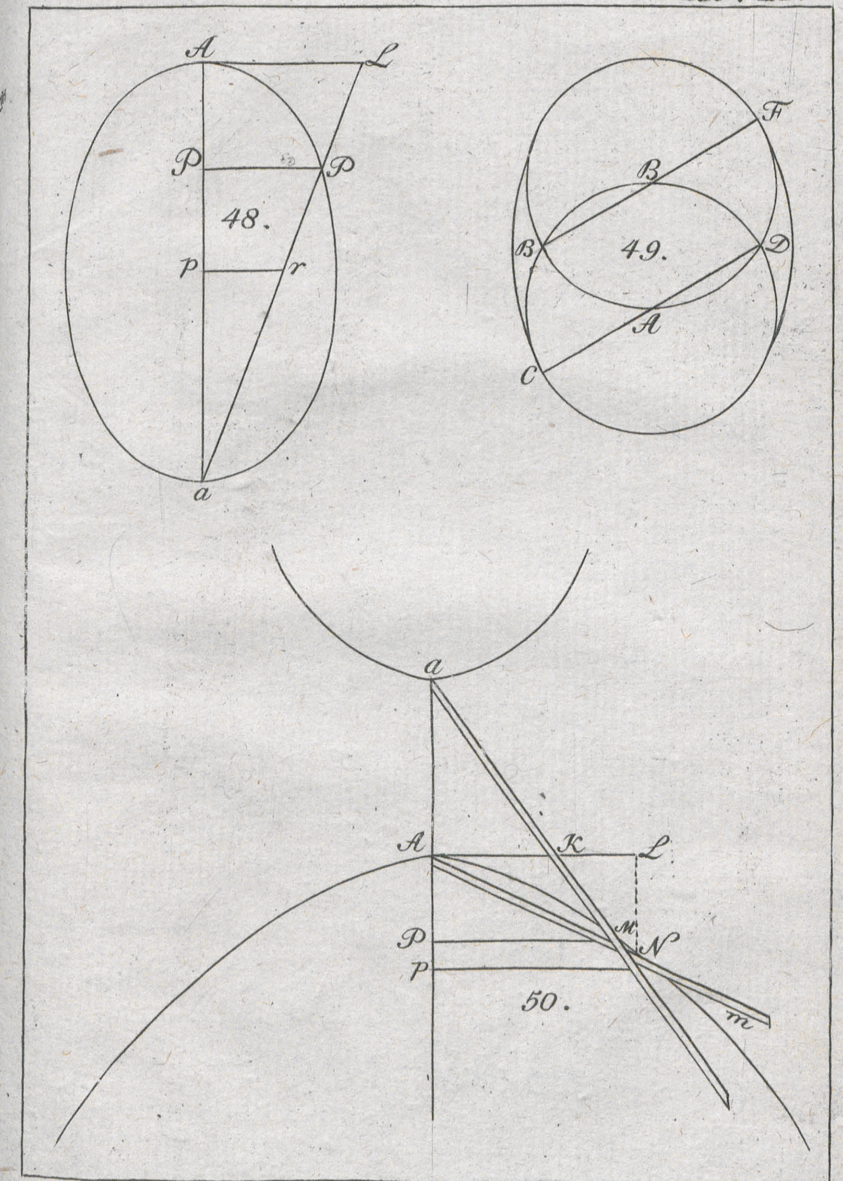
Tab. VII.


38.
M
A P C B
37.
R m D
M R M
K
A P F P C L f B
E
39.
V
IV
III
II
I
A B 1 2 3 4 5 C
P M
N
40.
m
m
M
L A P P P
M P
m P
P
41.
B
C 3 2 1 A 1 2 3 D
I P I
II P II
III P III
X
42.
A
F N
P M
P R m

Tab. VIII.

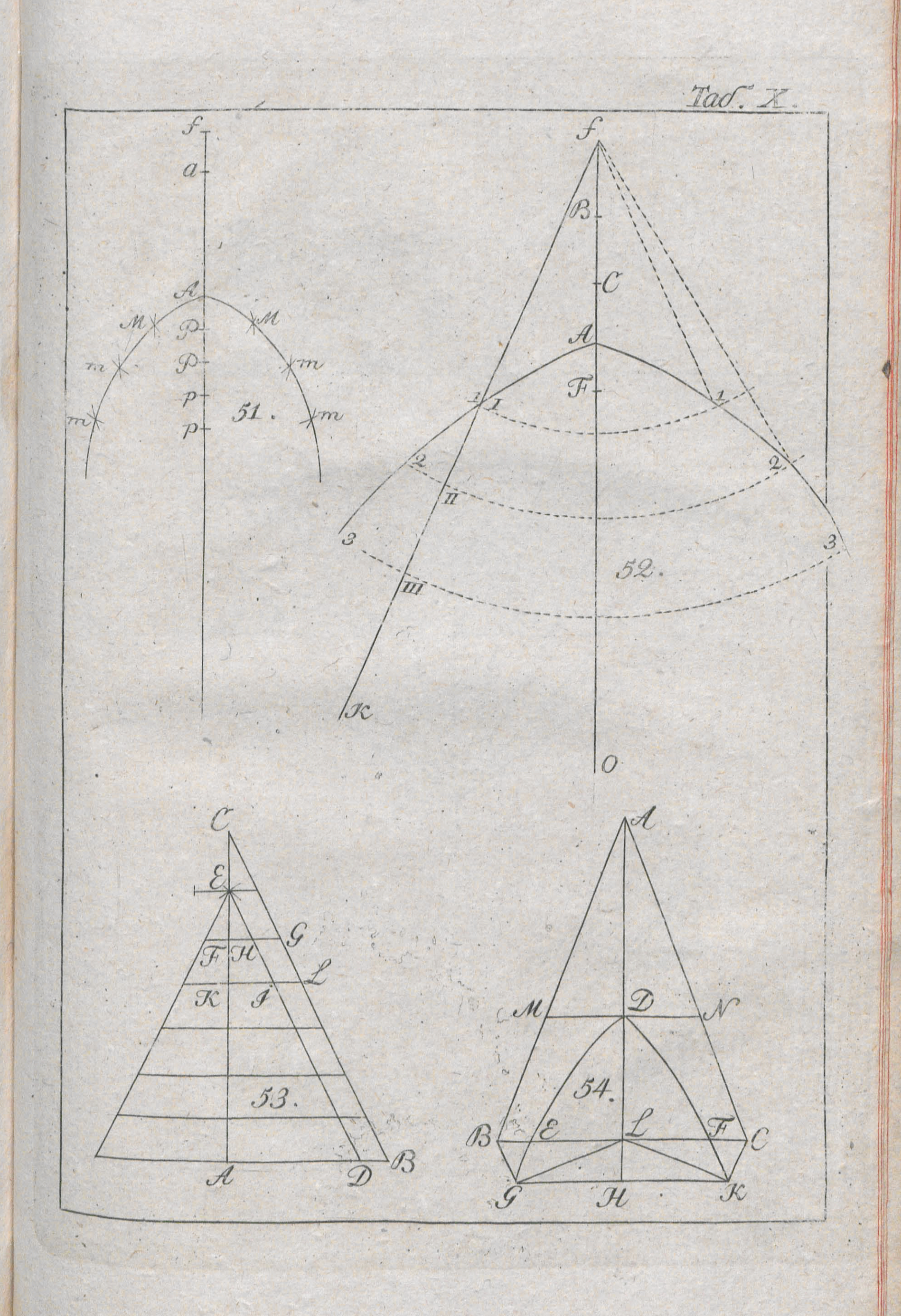


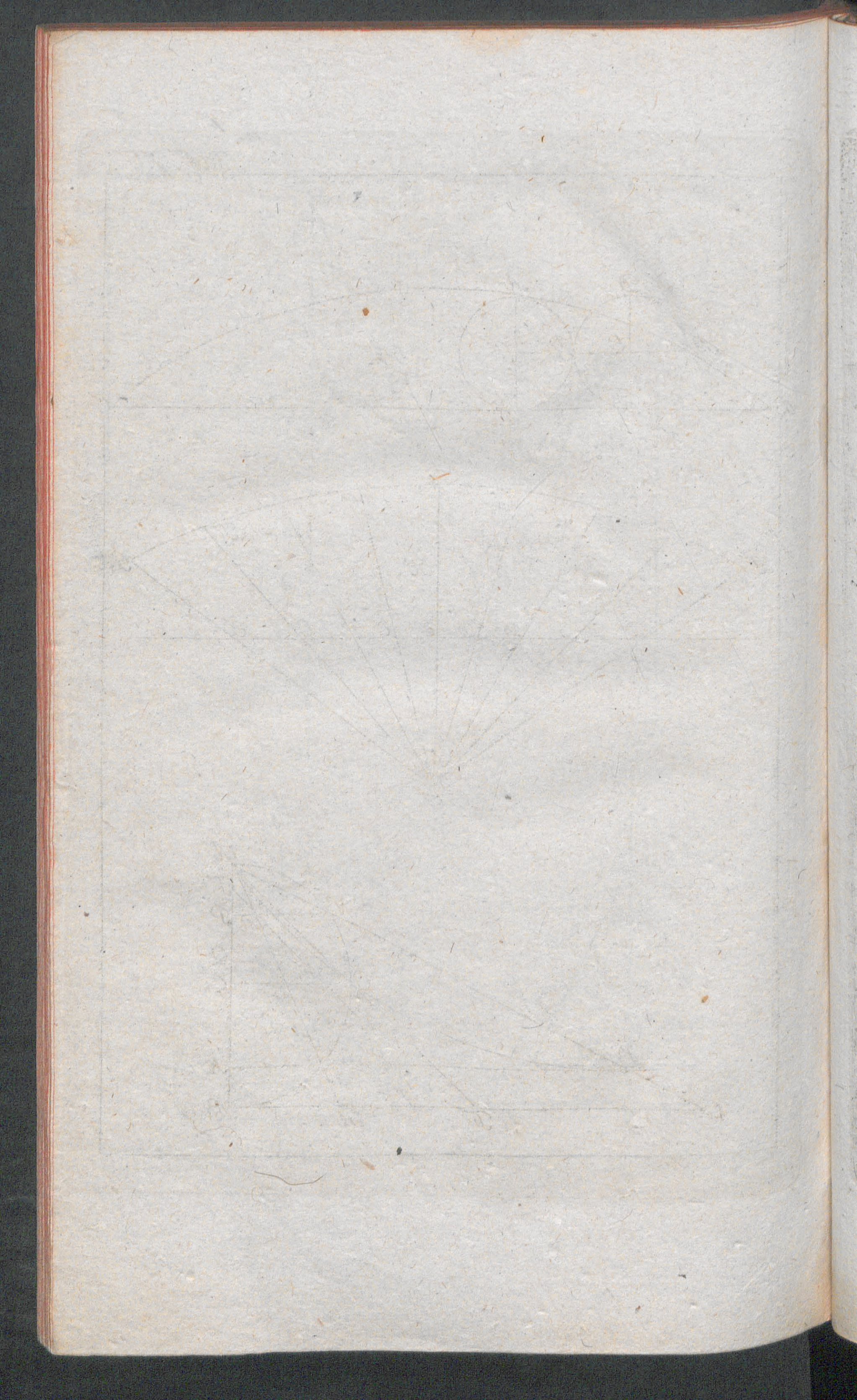
f
A
F
R
M
M
P
42.
M
M
P
X
C
43.
B
E
D
A
o
L
P
M
N
p
m
K
44.
a
L
N
M
45.
A
F
Q
P
B
H
G
G
L
o
M
N
H
46.
A
P
I
P
B
L
A
L
M
F
N
B
C
D
47.
f
a

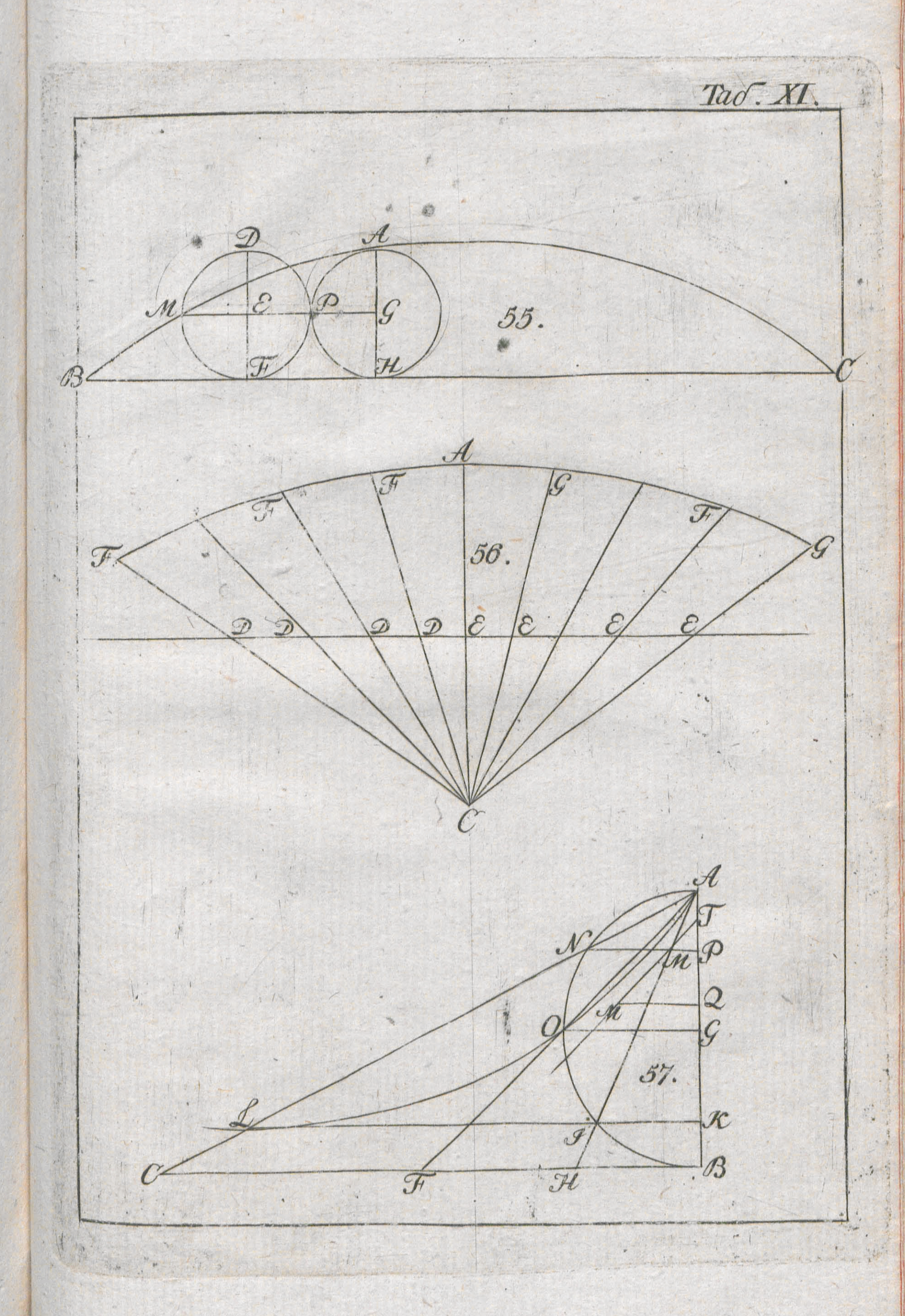


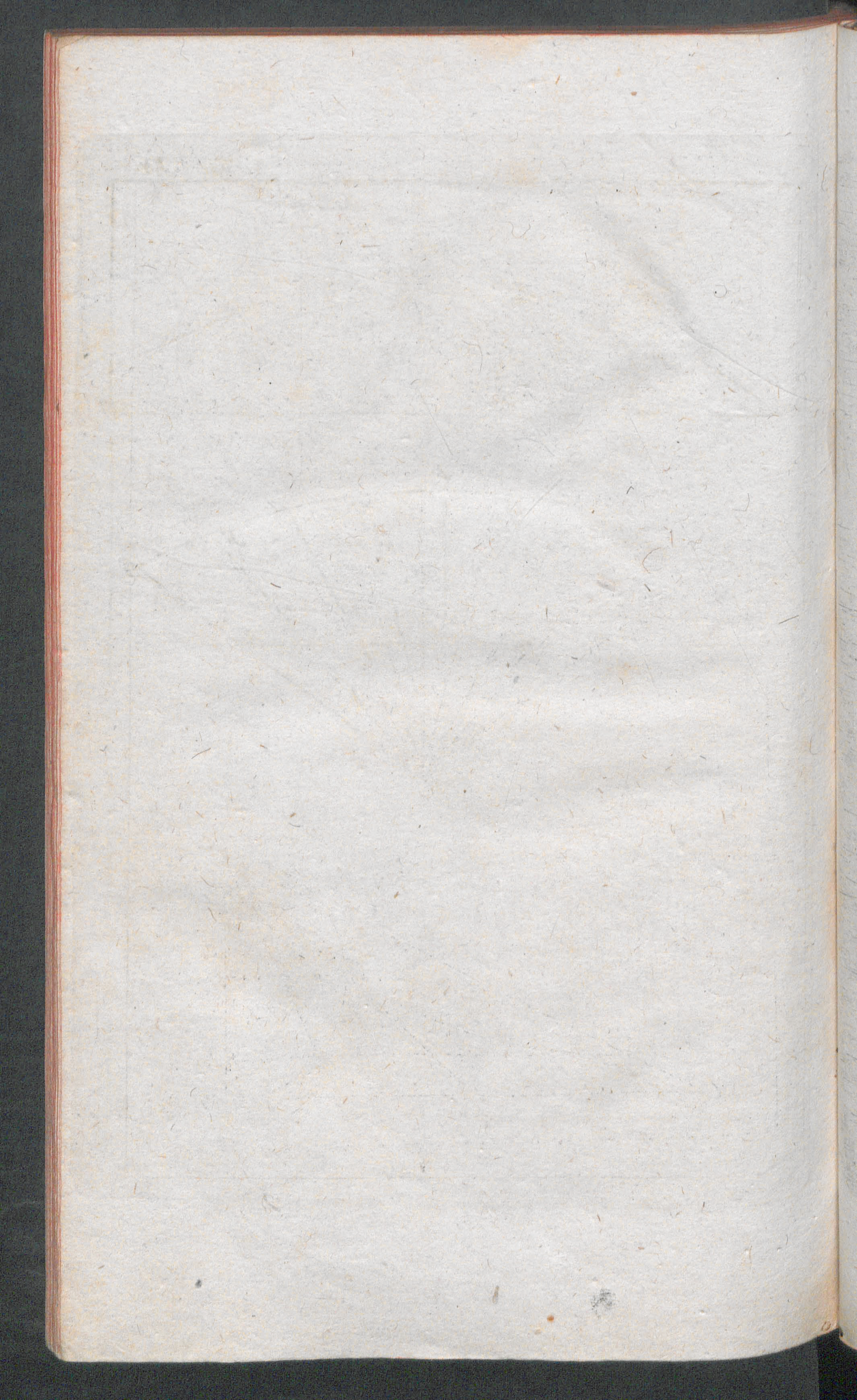
A
L
P
P
48.
p
r
a
F
B
B
49.
D
A
C
a
A
K
L
M
N
P
p
50.
m

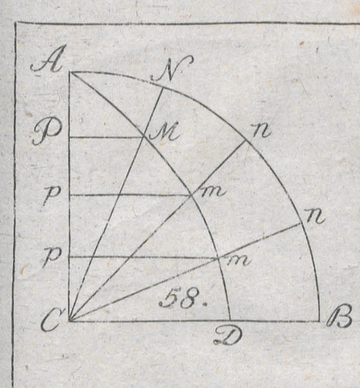
Tab. X.


f
a
A
M
M
P
P
m
m
p
p
m
m
51.
f
B
C
A
F
1
1
2
2
3
3
I
II
III
52.
K
O
C
E
G
F H
L
K I
53.
A
D
B
A
M
D
N
54.
B
E
L
F
C
G
H
K

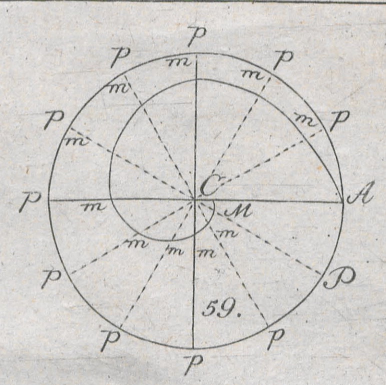



Tab. XI.
D
A
M
E
P
G
55.
B
F
H
C
A
F
F
G
F
F
56.
G
D
D
D
D
E
E
E
E
C
A
T
N
P
M
Q
O
m
G
57.
L
K
I
C
F
H
B

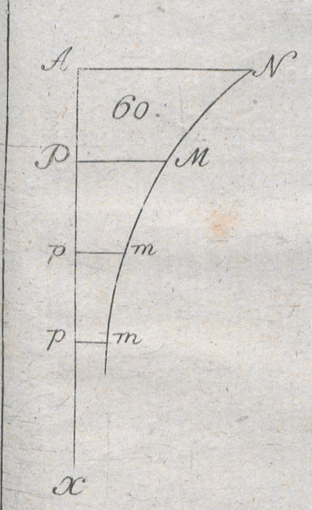




A
N
P
M
n
p
m
n
p
m
58.
C
D
B



P
P
m
P
m
m
P
m
m P
C
P
m
A
M
m
m
m
m
P
P
59.
P
P
P



A
N
60.
P
M
p
m
p
m
x

